

# Matematika

Dr. Simon Starček



# Matematika

Učbenik študijskega programa Ekonomija

Dr. Simon Starček



*Če bi Platon pisal... Biblijo,  
bi jo nedvomno začel z besedami:  
»V začetku je Bog ustvaril matematiko,  
potem pa v skladu z njenimi zakoni  
nebo in Zemljo.«*

*– M. Kline*

**Naslov:** Matematika  
**Podnaslov:** Učbenik študijskega programa Ekonomija  
**Avtor:** doc. dr. Simon Starček  
**Recenzenta:** prof. dr. Žiga Čepar  
doc. dr. Mitja Steinbacher  
**Grafične priloge:** Avtor  
**Tehnični urednik:** Avtor  
**Oblikovalec ovitka:** Avtor

**Izdajateljica:** Fakulteta za pravo in ekonomijo, Ljubljana,  
Krekov trg 1, 1000 Ljubljana, Slovenija,  
<http://www.katoliski-institut.si>,  
[contact@kat-inst.si](mailto:contact@kat-inst.si)

**Založnik:** Fakulteta za pravo in ekonomijo, Ljubljana,  
Krekov trg 1, 1000 Ljubljana, Slovenija,  
<http://www.katoliski-institut.si>,  
[contact@kat-inst.si](mailto:contact@kat-inst.si)

**Izdaja:** Prva izdaja (e-publikacija)

**Izid:** Ljubljana, 2026

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in  
univerzitetni knjižnici v Ljubljani

**COBISS.SI-ID:** 282259459

**ISBN:** 978-961-97286-1-1 (PDF)

© Fakulteta za pravo in ekonomijo, Ljubljana.

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali distribucija ni dovoljena brez soglasja založnika.

**Odgovorna oseba založnika:** Tilen Vesenjāk, direktor Fakultete za pravo in ekonomijo, Ljubljana

# Kazalo

<b>Predgovor</b>	<b>1</b>
<b>1 Logika in množice</b>	<b>3</b>
1.1 Logika	4
1.1.1 Izjave	4
1.1.2 Logični operatorji	5
1.1.3 Enakovredne izjave	6
De Morganova zakona za logične operatorje	7
1.1.4 Kvantifikatorji	7
Naloge	8
1.2 Množice	10
1.2.1 Zapisovanje množic	10
1.2.2 Aksiomatski pristop k teoriji množic	10
1.2.3 Osnovne operacije med množicami	14
1.2.4 Univerzalna množica in komplement	14
1.2.5 Ponazoritev množic	16
1.2.6 Unija in presek družine množic	18
1.2.7 Potenčna množica in kartezični produkt	21
1.2.8 Množice v ekonomiji	26
Naloge	29
<b>2 Številske množice</b>	<b>33</b>
2.1 Naravna števila in matematična indukcija	34
2.1.1 Naravna števila	34
2.1.2 Peanovi aksiomi	34
2.1.3 Praštevila in sestavljena števila	35
2.1.4 Matematična indukcija	36
2.1.5 Močnejša oblika indukcije	38
Naloge	39
2.2 Realna števila in absolutna vrednost	40
2.2.1 Intervali in urejenost realnih števil	40
2.2.2 Omejenost množic, supremum in infimum	41
2.2.3 Dedekindov aksiom (aksiom o polnosti)	41
2.2.4 Absolutna vrednost realnega števila	41
2.2.5 Epsilon-okolica	42
Naloge	42
2.3 Kompleksna števila	43
2.3.1 Definicija in osnovne operacije	43
2.3.2 Seštevanje in množenje kompleksnih števil	44

2.3.3	Odštevanje in deljenje kompleksnih števil . . . . .	45
2.3.4	Konjugirano kompleksno število . . . . .	45
2.3.5	Absolutna vrednost kompleksnega števila . . . . .	46
2.3.6	Grafična predstavitev kompleksnega števila . . . . .	46
2.3.7	Argument in polarni zapis kompleksnega števila . . . . .	46
2.3.8	Množenje kompleksnih števil v polarnem zapisu . . . . .	47
2.3.9	Potenciranje kompleksnih števil . . . . .	48
2.3.10	Deljenje kompleksnih števil v polarnem zapisu . . . . .	49
2.3.11	Korenjenje kompleksnih števil . . . . .	50
2.4	Številske množice v ekonomiji . . . . .	51
	Naloge . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Realne funkcije</b> . . . . .	<b>57</b>
3.1	Preslikave . . . . .	57
3.1.1	Kompozitum preslikav in njegova lastnost . . . . .	58
3.1.2	Sodost, lihost, monotonost in omejenost funkcij . . . . .	59
	Naloge . . . . .	60
3.2	Elementarne funkcije . . . . .	61
3.2.1	Linearna, kvadratna in polinomska funkcija . . . . .	61
3.2.2	Racionalne funkcije . . . . .	64
3.2.3	Potenčna funkcija . . . . .	67
3.2.4	EkspONENTNA funkcija . . . . .	68
3.2.5	Logaritemska funkcija . . . . .	69
3.2.6	Trigonometrične funkcije . . . . .	71
3.2.7	Ciklometrične funkcije . . . . .	74
3.2.8	Hiperbolične funkcije . . . . .	76
	Naloge . . . . .	78
3.3	Limita in zveznost funkcije . . . . .	80
3.3.1	Limita funkcije . . . . .	81
3.3.2	Zveznost funkcije . . . . .	85
3.4	Realne funkcije v ekonomiji . . . . .	90
	Naloge . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Zaporedja</b> . . . . .	<b>95</b>
4.1	Osnovna definicija . . . . .	95
4.2	Omejenost zaporedja . . . . .	96
4.3	Stekališča zaporedja . . . . .	96
4.4	Konvergenca zaporedja . . . . .	97
4.4.1	Algebra konvergentnih zaporedij . . . . .	99
4.5	Divergentna zaporedja . . . . .	101
4.6	Monotona zaporedja . . . . .	102
4.7	Značilne limite zaporedij . . . . .	103
4.8	Zaporedja v ekonomiji . . . . .	105
	Naloge . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Vrste</b> . . . . .	<b>111</b>
5.1	Številske vrste . . . . .	111
5.1.1	Vrste s pozitivnimi členi . . . . .	113

5.1.2	Kriteriji za konvergentnost vrst	115
5.1.3	Posebne vrste in njihova konvergenca	119
5.2	Funkcijske vrste	121
5.2.1	Točkovna konvergenca funkcijskih vrst	121
5.2.2	Enakomerna konvergenca	122
5.2.3	Potenčne vrste	122
5.2.4	Taylorjeve vrste	123
5.3	Vrste v ekonomiji	124
	Naloge	125
<b>6</b>	<b>Odvod</b>	<b>127</b>
6.1	Definicija odvoda funkcije	128
6.2	Pravila za odvajanje	130
6.3	Odvodi elementarnih funkcij in višji odvodi	132
6.3.1	Odvod eksponentne funkcije	132
6.3.2	Odvod logaritmske funkcije	133
6.3.3	Odvod potence	133
6.3.4	Odvodi kotnih (trigonometričnih) funkcij	134
6.3.5	Odvodi ciklotometričnih (inverznih trigonometričnih) funkcij	134
6.3.6	Odvodi hiperboličnih funkcij	136
6.3.7	Tabela odvodov elementarnih funkcij	136
6.3.8	Višji odvodi	136
	Naloge	137
6.4	Geometrijski pomen odvoda	138
6.4.1	Tangenta na graf funkcije	138
6.4.2	Diferencial funkcije	138
	Naloge	139
6.5	Uporaba odvoda	140
6.5.1	Izreki o srednji vrednosti	140
6.5.2	L'Hospitalovo pravilo	142
6.5.3	Taylorjev polinom	143
6.5.4	Monotonost funkcije in lokalni ekstremi	144
6.5.5	Konveksnost, konkavnost in točke prevoja	148
6.5.6	Graf funkcije	149
	Naloge	150
6.6	Odvod v ekonomiji	152
<b>7</b>	<b>Nedoločeni integral</b>	<b>155</b>
7.1	Definicija nedoločenega integrala	156
7.2	Pravila za integriranje	157
7.2.1	Linearno pravilo	157
7.2.2	Integrali potenc	157
7.2.3	Osnovni integrali elementarnih funkcij	158
7.2.4	Integrali racionalnih funkcij trigonometričnih izrazov	158
7.2.5	Integrali vsot in razlik	158
7.2.6	Integrali produktov in kvocientov	158
7.3	Integracijske metode	159
7.3.1	Metoda substitucije	159

7.3.2	Integracija po delih . . . . .	160
7.3.3	Racionalne funkcije . . . . .	160
7.3.4	Trigonometrične substitucije . . . . .	161
7.3.5	Metode za zahtevnejše izraze . . . . .	162
	Naloge . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Določeni integral</b>	<b>165</b>
8.1	Delitve intervala in integralske vsote . . . . .	165
8.2	Darbouxov integral in integrabilnost . . . . .	166
8.3	Riemannov integral . . . . .	167
8.4	Osnovne lastnosti določenega integrala . . . . .	170
8.5	Zveza med določenim in nedoločenim integralom . . . . .	171
8.6	Uporaba določenega integrala . . . . .	172
8.6.1	Ploščina lika pod krivuljo . . . . .	172
8.6.2	Dolžina loka . . . . .	175
8.6.3	Prostornina rotacijskega telesa . . . . .	175
8.6.4	Površina rotacijskega telesa . . . . .	176
8.7	Določeni integral v ekonomiji . . . . .	177
	Naloge . . . . .	178
<b>9</b>	<b>Vektorji</b>	<b>181</b>
9.1	Osnovni pojmi . . . . .	182
9.2	Operacije z vektorji . . . . .	184
9.2.1	Seštevanje vektorjev . . . . .	184
9.2.2	Odštevanje vektorjev . . . . .	185
9.2.3	Množenje vektorja s skalarjem . . . . .	185
9.2.4	Skalarni produkt . . . . .	186
9.2.5	Vektorski produkt (v $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	187
9.2.6	Mešani produkt (v $\mathbb{R}^3$ ) . . . . .	188
9.3	Linearna kombinacija, linearna odvisnost in neodvisnost . . . . .	188
9.4	Vektorji v ekonomiji . . . . .	192
	Naloge . . . . .	193
<b>10</b>	<b>Matrike</b>	<b>195</b>
10.1	Definicija matrike . . . . .	196
10.2	Operacije z matrikami . . . . .	199
10.2.1	Seštevanje matrik . . . . .	199
10.2.2	Množenje matrike s skalarjem . . . . .	200
10.2.3	Matrični produkt . . . . .	201
10.2.4	Množenje matrike z vektorjem . . . . .	201
10.2.5	Transponiranje matrike . . . . .	202
10.3	Sistemi linearnih enačb in matrike . . . . .	203
10.3.1	Splošna oblika sistema linearnih enačb . . . . .	203
10.3.2	Razširjena matrika . . . . .	204
10.3.3	Rang matrike . . . . .	204
10.3.4	Gaussova eliminacija . . . . .	205
10.4	Matrike v ekonomiji . . . . .	206
	Naloge . . . . .	209

<b>11 Linearno programiranje</b>	<b>211</b>
11.1 Linearne neenačbe in dopustna množica . . . . .	212
Linearne neenačbe dveh spremenljivk . . . . .	212
Sistem linearnih neenačb . . . . .	212
Dopustna množica . . . . .	213
Robne točke in geometrijska interpretacija . . . . .	213
11.2 Simpleksna metoda . . . . .	222
<b>Literatura</b>	<b>229</b>



# Predgovor

Matematika je eden izmed najstarejših jezikov človeštva. Skozi tisočletja je služila kot orodje za razumevanje sveta, za merjenje zemlje, opisovanje gibanj nebesnih teles, razumevanje rasti gospodarstev ter modeliranje odločitev posameznikov in organizacij. Danes, ko študent ekonomije vstopa v svet sodobnega gospodarstva, digitalnih trgov, podatkovnih analiz in hitrih tehnoloških sprememb, matematika postaja še toliko bolj nepogrešljiva - ne le kot računsko orodje, temveč kot način razmišljanja.

Učbenik, ki je pred vami, je zasnovan kot premišljeno strukturirano popotovanje od najbolj osnovnih logičnih načel do konceptov odvoda in integralov ter vektorjev in matrik, ki jih boste potrebovali pri ekonomskih analizah, finančnem modeliranju, statističnih metodah in kvantitativnih odločitvah.

Pri vsakem poglavju boste najprej našli kratek konceptualni uvod, ki povezuje matematične ideje z ekonomskimi primeri: od logičnih trditev, ki nas učijo natančnega sklepanja pri analizi podatkov, do funkcij, ki modelirajo odziv potrošnikov, stroškovne strukture ali obnašanje trgov. Limite in zveznost boste srečali pri razumevanju prilagoditev cen, zaporedja in vrste pri diskontiranju ter finančni matematiki, odvod pa kot osnovno orodje analize rasti, produktivnosti in optimizacije. Integralni račun vas bo popeljal v svet agregiranja podatkov, izračunavanja površin, verjetnostnih porazdelitev ter ekonomskih »skupnih učinkov«.

Ker matematika ni nastala naenkrat, temveč je plod več tisočletnega razvoja, so v vsako poglavje vključene tudi kratke zgodovinske opombe. Te nas spomnijo, da so se z izzivi, s katerimi se srečujemo danes, srečevali že antični Grki, arabski matematični mojstri, renesančni misleci in ustanovitelji moderne analize, kot sta Newton in Leibniz. Razumevanje njihovega dela ni le poklon zgodovini, temveč pomaga osvetliti logiko in motivacijo matematičnih metod, ki jih uporabljamo danes.

Pri pisanju učbenika sta me vodili dve načeli: jasnost in postopnost. Študent naj pri vsakem novem konceptu razume *zakaj* nekaj deluje, ne le *kako* se izračuna. Zato vsakemu teoretičnemu delu sledijo natančno razloženi primeri in izbrane naloge, ki postopno vodijo od preprostega k zahtevnejšemu. Matematični formalizem je prikazan premišljeno: ne preveč tehnično, da bi obremenjeval začetnika, a dovolj natančno, da tvori trden temelj za nadaljnji študij ekonomije, financ, statistike in podatkovnih analiz.

Struktura učbenika sledi tipičnemu zaporedju predmetov na dodiplomskem študiju poslovnih in ekonomskih ved. Prva poglavja uvajajo logiko, množice in števil, ki tvorijo osnovni jezik vseh kasnejših predmetov. Sledi obravnava realnih funkcij, zaporedij in vrst, nato diferencialni in integralni račun ter na koncu vektorji in matrike,

ki jih boste srečali v kvantitativnih metodah, ekonometriji in finančni analizi. Vsako poglavje se zaključuje z naborom nalog različnih zahtevnostnih stopenj - od temeljnih računskih vaj do konceptualno zahtevnejših problemov in zgledov iz ekonomije.

Učbenik je zamišljen kot spremljevalec pri predavanjih in vajah, hkrati pa kot priročnik za samostojno učenje. Študentom priporočam, da teoretični del preberejo pred predavanjem ali vsaj po njem, primeri pa naj služijo kot most do reševanja nalog. Del nalog je namenoma nekoliko zahtevnejši in presega minimalne izpitne zahteve; njihov namen je, da vas spodbudi k poglobljenemu razumevanju in k razvijanju sposobnosti samostojnega reševanja problemov, kar je ključno pri kasnejšem strokovnem delu v praksi.

Učbenik je torej namenjen tako začetnikom kot tudi tistim, ki bi želeli obnoviti svoje znanje in ga nadgraditi z razumevanjem vloge matematike v ekonomiji. Naj vam služi kot most med matematiko kot znanostjo in ekonomijo kot prakso odločanja v svetu omejenih virov in nepopolnih informacij.

Če boste ob prebiranju občutili radovednost, presenečenje ali intelektualno zadovoljstvo, je bil namen dosežen. Matematika je zahtevna, a izjemno lepa - in upam, da bo ta učbenik vsaj delček te lepote prenesel tudi na vas.

*Dr. Simon Starček*

# Poglavje 1

## Logika in množice

### Uvod

Logika in teorija množic sta temeljna gradnika sodobnega matematičnega jezika. Brez njiju ne bi mogli natančno zapisovati trditev, dokazovati rezultatov, razumeti funkcij, limit, zaporedij ali modelov, ki jih uporabljamo v ekonomiji, statistiki in finančni matematiki oziroma matematiki nasploh.

V tem poglavju bomo spoznali:

- osnovne izjave in logične operatorje,
- pravilnostne tabele,
- kvantifikatorje, ki so nujni pri zapisovanju matematičnih definicij,
- zapisovanje množic in operacije med njimi ter
- povezave med logičnimi operatorji in operacijami med množicami.

Kratke zgodovinske opombe in ekonomski primeri so dodani kot naravna motivacija za uporabo teh pojmov pri razumevanju realnih sistemov.

### Zgodovinski razvoj logike in množic

Začetki logičnega razmišljanja segajo daleč v antično Grčijo, kjer so misleci kot Tales, Pitagora, Platon in zlasti Aristotel oblikovali prve sistematične pristope k pravilnemu sklepanju. Aristotelova silogistična logika je več kot tisočletje predstavljala temelj zahodnega razumevanja deduktivnega mišljenja, kar kaže, kako zgodaj se je pojavila potreba po natančni utemeljitvi matematičnih in filozofskih trditev. Logične oblike, kot so implikacija, univerzalne trditve in negacija, se v njihovih spisih pojavljajo že v zelo jasni obliki, čeprav ne še v simbolnem jeziku, kakršnega poznamo danes.

V srednjem veku so bila Aristotelova dela temelj univerzitetnega kurikula, logika pa je postala osrednje orodje sholastične filozofije. Šele v 19. stoletju pa je prišlo

do prelomnega napredka: logiko so začeli formalizirati z matematično natančnostjo. Ključne prispevke so dali Augustus De Morgan, George Boole, Charles Sanders Peirce in predvsem Gottlob Frege, ki velja za enega izmed očetov moderne simbolne logike. Njihovo delo je logiko osvobodilo naravnega jezika in uvedlo simbolni zapis, pravila sklepanja ter koncept formalnega dokaza, kakršnega uporabljamo danes v matematiki in računalništvu. V 20. stoletju so velike dosežke dodali še David Hilbert, Alfred Tarski, Kurt Gödel, Alonzo Church in Alan Turing; slednji je s svojimi raziskavami povezal logiko z vprašanji algoritmov in izračunljivosti, kar predstavlja enega temeljev sodobne računalniške znanosti.

Vzpostavljanje teorije množic je potekalo vzporedno s formalizacijo logike. Čeprav se razmišljanje o definiranju množic pojavlja že pri predhodnikih Georga Cantorja, šele njegov članek iz leta 1874 z naslovom *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, pomeni rojstvo moderne teorije množic. Cantor je prvi uvedel pojme neskončnih množic, njihove ekvivalence in primerjanja velikosti neskončnosti, s čimer je odprl povsem novo matematično področje. Njegova teorija je hitro postala temelj za rigorozno gradnjo matematične analize, vendar je povzročila tudi presenetljive paradokse. Na te težave so odgovorili Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel in drugi, ki so oblikovali aksiomatski sistem ZFC, danes najpogostejši okvir za razumevanje množic in osnov matematičnega sveta.

Matematična logika in teorija množic sta tako rezultat tisočletnega razvoja: od antičnih poskusov razumevanja pravilnega logičnega sklepanja do moderne formalne teorije, ki omogoča natančno definicijo funkcij, struktur, dokazov in skoraj vseh pojmov, ki jih srečamo v sodobni matematiki, ekonomiji, statistiki in računalništvu.

## 1.1 Logika

Zelo poenostavljeno je logika veda o pravilnem sklepanju. V matematiki nas zanimajo izjave, ki so bodisi *resnične* bodisi *neresnične*. To lastnost imenujemo *logična vrednost*.

### 1.1.1 Izjave

**Definicija 1.1.** Izjava je trditev, o kateri lahko nedvoumno določimo, ali je resnična ali neresnična.

Primeri izjav:

»5 je praštevilo.«,      »Cene v letu 2025 so višje kot leta 2024.«

Izraz, za katerega logične vrednosti ne moremo določiti (na primer »Ali imaš rad matematiko?«), ni izjava v matematičnem smislu.

Enostavne izjave običajno označujemo z malimi tiskanimi črkami  $p, q, r, \dots$ , sestavljene izjave pa z velikimi črkami  $A, B, C, \dots$

*Primer 1.1.* Naj bo:

$p$  : »6 je naravno število.«,       $q$  : »6 je praštevilo.«

Izjava  $p$  je resnična, izjava  $q$  pa neresnična.

## 1.1.2 Logični operatorji

Sestavljene izjave gradimo iz enostavnih z logičnimi operatorji. Njihove logične vrednosti prikažemo s t. i. pravilnostnimi tabelami.

### Negacija

$\neg p$  : »ni res, da  $p$ «.

Negacija spremeni logično vrednost izjave:

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

*Primer 1.2.* Če je  $p$ : »6 je naravno število«, potem je

$\neg p$  : »6 ni naravno število.«

in je neresnična izjava.

### Disjunkcija

$p \vee q$  : » $p$  ali  $q$ «.

Izjava  $p \vee q$  je resnična, če je resnična vsaj ena od izjav  $p$  ali  $q$ .

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*Primer 1.3.* Izjava »Študent je opravil izpit ali ima bonus točke« je resnična, če velja vsaj ena od obeh možnosti.

### Konjunkcija

$p \wedge q$  : » $p$  in  $q$ «.

Izjava  $p \wedge q$  je resnična natanko tedaj, ko sta resnični obe izjavi  $p$  in  $q$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

*Primer 1.4.* Izjava »6 je naravno število in 6 je praštevilo« je neresnična, ker druga enostavna izjava ne drži.

## Implikacija

$p \Rightarrow q$  : »če  $p$ , potem  $q$ «.

Implikacija je neresnična samo v primeru, ko iz resnične premise sledi neresničen zaključek:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

*Primer 1.5.*

$p$  : »Podjetje poveča oglaševanje.«,       $q$  : »Prodaja se poveča.«

Logično implikacijo »če podjetje poveča oglaševanje, potem se prodaja poveča« obravnavamo po zgornji tabeli; ali je v konkretnem primeru resnična, pa je empirično vprašanje.

## Ekvivalenca

$p \Leftrightarrow q$  : » $p$  natanko tedaj, ko  $q$ «.

Ekvivalenca je resnična, če imata izjavi  $p$  in  $q$  enako logično vrednost:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

### 1.1.3 Enakovredne izjave

**Definicija 1.2.** Izjavi  $A$  in  $B$  sta *enakovredni*, če imata enako logično vrednost za vse možne vrednosti enostavnih izjav, iz katerih sta sestavljeni. Pišemo  $A \approx B$ .

## De Morganova zakona za logične operatorje

V izjavnem računu imajo posebno pomembno vlogo t. i. *De Morganova zakona*, ki opisujeta, kako negacija deluje na logična veznika *in* ter *ali*. Zakona sta osnovno orodje pri pretvarjanju logičnih izrazov v ekvivalentne oblike, kar je osrednjega pomena pri dokazu pravil izjavnega računa, poenostavljanju logičnih formul ter pri konstrukciji resničnostnih tabel.

**Izrek 1.1** (De Morganova zakona). Za poljubni izjavi  $p$  in  $q$  veljata naslednji logični ekvivalenci:

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge q) &\approx \neg p \vee \neg q, \\ \neg(p \vee q) &\approx \neg p \wedge \neg q.\end{aligned}$$

*Dokaz.* Ekvivalenci lahko preverimo z uporabo resničnostnih tabel. V prvem primeru opazimo, da je izjava  $\neg(p \wedge q)$  resnična natanko tedaj, ko vsaj ena izmed izjav  $p$  ali  $q$  ni resnična, kar je ekvivalentno izjavi  $(\neg p) \vee (\neg q)$ . Podobno je negacija disjunkcije  $p \vee q$  resnična natanko tedaj, ko nista resnični ne  $p$  ne  $q$ , kar ustreza konjunkciji  $(\neg p) \wedge (\neg q)$ .  $\square$

Augustus De Morgan (1806–1871) je bil eden najvplivnejših britanskih logikov 19. stoletja ter eden izmed pionirjev pri razvoju simbolne logike. Kot profesor na University College London je pomembno prispeval k formalizaciji logičnega sklepanja ter uvedel več temeljnih pojmov, ki jih uporabljamo še danes. Njegova dva znamenita zakona, danes znana kot *De Morganova zakona*, sta omogočila sistematično preoblikovanje logičnih izrazov v ekvivalentne oblike in sta postala sestavni del modernih logičnih sistemov, algebre Boolovih funkcij ter teorije množic.

Med najpomembnejšimi enakovrednostmi so še:

$$p \Rightarrow q \approx \neg p \vee q$$

in

$$p \Leftrightarrow q \approx (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

*Primer 1.6.* Negacija implikacije:

$$\neg(p \Rightarrow q) \approx p \wedge \neg q.$$

To lahko preverimo s pravilnostno tabelo ali z uporabo enakovrednosti  $p \Rightarrow q \approx \neg p \vee q$  ter De Morganovih zakonov.

### 1.1.4 Kvantifikatorji

Matematika pogosto ne govori samo o posameznih elementih, temveč o *vseh* ali *nekaterih* elementih množice.

$$\forall x : P(x) \quad \text{»za vsak } x \text{ velja } P(x)\text{«},$$

$\exists x : P(x)$  »obstaja  $x$ , za katerega velja  $P(x)$ «.

Negaciji kvantificiranih izjav sta:

$$\neg \forall x : P(x) \approx \exists x : \neg P(x),$$

$$\neg \exists x : P(x) \approx \forall x : \neg P(x).$$

*Primer 1.7.*

1. Izjava: »Vsak potrošnik poveča nakup ob znižanju cene.« Zapišemo:

$$\forall x : P(x),$$

kjer  $P(x)$  pomeni »potrošnik  $x$  poveča nakup ob znižanju cene«. Negacija se glasi:

$$\exists x : \neg P(x),$$

torej: »Obstaja potrošnik, ki ne poveča nakupa ob znižanju cene.«

2. Izjava: »Nekateri potrošniki varčujejo.« Zapišemo:

$$\exists x : Q(x),$$

negacija pa:

$$\forall x : \neg Q(x) \quad (\text{»Vsi potrošniki ne varčujejo.«}).$$

## Naloge

1. Naj bodo dane izjave:

$p$  : »Število 5 je praštevilo.«,       $q$  : »4 je liho število.«,       $r$  : »Cene rastejo.«

Zapišite naslednje sestavljene izjave v razumljivi slovenski obliki:

(a)  $p \wedge \neg q$

(b)  $q \vee r$

(c)  $\neg(p \Rightarrow q)$

2. Zapišite resničnostni tabeli za:

(a)  $p \Rightarrow q$

(b)  $\neg p \vee q$

Nato preverite, ali sta izjavi ekvivalentni.

3. Ugotovite, ali sta sestavljeni izjavi ekvivalentni:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \quad \text{in} \quad p \Rightarrow (q \Rightarrow r).$$

Namig: uporabite resničnostne tabele ali znane ekvivalence.

4. Poiščite negacijo naslednjih izjav:

- (a)  $p \vee q$
- (b)  $p \Rightarrow q$
- (c)  $(p \wedge q) \vee r$

Zapišite negacije brez uporabe implikacije.

5. V nadaljevanju so podane izjave o realnem številu  $x$ :

$$A(x) : x > 2, \quad B(x) : x^2 > 4.$$

Preverite, ali velja:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (A(x) \Rightarrow B(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R} : (B(x) \Rightarrow A(x)).$$

Kaj to pove o ekvivalenci izjav  $A(x)$  in  $B(x)$ ?

6. Naj bo  $U = \mathbb{N}$ . Zapišite negacije naslednjih kvantificiranih izjav:

- (a)  $\forall n \in \mathbb{N} : 2n$  je sodo število.
- (b)  $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 < n$ .
- (c)  $\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n < m$ .

7. Ugotovite, ali je naslednja sestavljena izjava tautologija, protislovje ali nič od tega (kontingentna izjava):

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \wedge (p \vee \neg p).$$

Utemeljite svoj odgovor.

8. Uporabite znane ekvivalence in poenostavite sestavljeno izjavo:

$$\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)).$$

Izraz poenostavite tako, da se negacija pojavlja samo pred enostavnimi izjavami.

9. Naj bo podana sestavljena izjava

$$A = (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r).$$

Zapišite izjavo  $A$  v izbrani (normalni) disjunktivni obliki.

10. Naj bo dana trditev o realnih številih:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y^2 + 1.$$

- (a) Razložite, ali je trditev resnična.
- (b) Zapišite njeno negacijo.
- (c) Preverite smiselnost negacije: je negirana izjava resnično neresnična?

## 1.2 Množice

Teorija množic predstavlja osnovni jezik matematike: elementi, pripadnost, operacije in relacije med njimi.

### 1.2.1 Zapisovanje množic

Množice označujemo z velikimi črkami  $A, B, M, \dots$ , njihove elemente pa z malimi črkami  $a, b, x, y, \dots$ .

- **Eksplisitni zapis:**

$$A = \{1, 3, 5, 7\}.$$

- **Zapis z lastnostjo:**

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je sodo število}\}.$$

Prazno množico, ki nima nobenega elementa, označimo z  $\emptyset$  ali kot  $\{\}$ .

### 1.2.2 Aksiomatski pristop k teoriji množic

Teorija množic je v začetku 20. stoletja postavljena na *aksiomatske temelje*. Namesto da bi privzeli obstoj vseh »smiselno definiranih« množic, se v aksiomatskem pristopu natančno določi, katere množice obstajajo in na kakšne načine lahko iz že obstoječih množic tvorimo nove. Tem pravilom pravimo *aksiomi teorije množic*.

V nadaljevanju bomo spoznali nekaj temeljnih aksiomov, ki tvorijo osnovo aksiomatske teorije množic. Ti aksiomi so zasnovani tako, da omogočajo varno konstrukcijo množic, hkrati pa preprečujejo nastanek znanih paradoksov, kot je Russellov paradoks. Pri tem se bomo omejili na aksiome, ki so potrebni za razumevanje nadaljnje snovi v tem učbeniku.

#### Aksiom o podmnožici (aksiom ločitve)

Naj bo  $A$  množica in naj bo  $P(x)$  poljubna logična lastnost, smiselna za elemente množice  $A$ . Tedaj obstaja množica, ki vsebuje natanko tiste elemente množice  $A$ , za katere velja lastnost  $P(x)$ . To množico zapišemo kot

$$\{x \in A : P(x)\}.$$

Z drugimi besedami: za vsako množico  $A$  in vsako logično lastnost  $P$  lahko iz množice  $A$  izločimo podmnožico vseh tistih elementov, ki to lastnost izpolnjujejo.

Aksiom o podmnožici je uvedel Ernst Zermelo kot del aksiomatske teorije množic, da bi odpravil protislovja naivne teorije množic. V sodobni obliki je sestavni del Zermelo–Fraenklove teorije množic (ZF) in predstavlja enega temeljnih mehanizmov za varno konstruiranje novih množic.

*Primer 1.8.* Naj bo  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Z uporabo aksioma o podmnožici lahko definiramo množico

$$B = \{x \in A : x \text{ je sodo število}\} = \{2, 4\}.$$

**Definicija 1.3.** Množica  $A$  je *podmnožica* množice  $B$ , če vsak element  $A$  pripada  $B$ . Pišemo  $A \subseteq B$ .

*Primer 1.9.* Velja

$$\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

**Izrek 1.2.** Naj bo  $A$  poljubna množica. Potem je  $\emptyset \subseteq A$ .

*Dokaz.* Po definiciji pojma podmnožice moramo pokazati, da velja

$$\forall x \in \emptyset : x \in A.$$

Da bi to dokazali, bi morali vzeti poljuben element  $x \in \emptyset$  in pokazati, da je  $x$  element množice  $A$ . Ker pa prazna množica po definiciji ne vsebuje nobenega elementa, primerne  $x$  sploh ni mogoče izbrati. Trditev je zato izpolnjena »na prazno«, kar pomeni, da je pogoj univerzalne kvantifikacije izpolnjen za vse elemente prazne množice.  $\square$

**Izrek 1.3.** Naj bodo  $A$ ,  $B$  in  $C$  poljubne množice. Tedaj velja:

1.  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .
2.  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ .

Aksiom o podmnožici zagotavlja, da iz že obstoječe množice lahko vedno tvorimo novo množico z izbiro elementov na podlagi dane lastnosti. Pomembno je poudariti, da ta aksiom ne dovoljuje tvorjenja množice *vseh* objektov z določeno lastnostjo, temveč le podmnožice že dane množice. Prav ta omejitev preprečuje nastanek logičnih protislovij, kot je Russellov paradoks.

## Russellov paradoks

Denimo, da bi obstajala množica  $A$  vseh množic, to je množica, katere elementi so prav vse množice. Sedaj pa naj bo  $B$  tista njena podmnožica, ki sestoji ravno iz vseh množic (torej elementov množice  $A$ ), ki ne vsebujejo same sebe. Po aksiomu o podmnožici bi taka množica morala obstajati. No, sedaj si zastavimo usodno vprašanje: »Ali množica  $B$  vsebuje samo sebe?«

Če  $B$  sama sebe vsebuje, potem po definiciji množice  $B$  ne sme vsebovati same sebe. Po drugi strani pa, če  $B$  ne vsebuje same sebe, mora biti po definiciji množice  $B$  vendarle vsebovana sama v sebi, saj  $B$  vsebuje ravno vse množice s to lastnostjo. Kakorkoli stvar obrnemo, množica  $B$  je vsebovana sama v sebi natanko tedaj, ko ni vsebovana sama v sebi, kar je seveda protislovje. Kaj je torej narobe? Edino napako smo storili že povsem na začetku, ko smo privzeli obstoj množice vseh množic, ki potemtakem ne more obstajati.

Pokazati, da je neka množica podmnožica druge, je naloga, ki jo v matematiki pogosto srečujemo na vsakem koraku. Ustavimo se za trenutek pri vprašanju, kako kaj takega dokažemo. Po definiciji bo množica  $A$  podmnožica množice  $B$ , če uspemo pokazati, da je vsak element množice  $A$  vsebovan v množici  $B$ . Če je množica  $A$  »dovolj majhna«, lahko seveda za vsak njen konkreten element posebej preverimo, če pripada množici  $B$  ali ne. Sicer pa je treba poiskati nek splošen premislek, saj pri takem dokazovanju prav nič ne zaležejo konkretni primeri.

*Primer 1.10.* Naj bo

$$A = \{2n - 1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

množica vseh lihih celih števil in naj bo

$$B = \{(2n - 1)^3 : n \in \mathbb{Z}\}$$

množica vseh kubov lihih celih števil. Pokažimo, da velja  $B \subseteq A$ .

Preden se lotimo dokaza, si je seveda priporočljivo ogledati nekaj elementov množice  $B$ , da lahko sploh presodimo, ali menimo, da je  $B$  sploh res vsebovana v  $A$  ali ne. Tako so elementi množice  $B$ , na primer, števila

$$(2 - 1)^3 = 1, \quad (8 - 1)^3 = 343,$$

itd. Števili, ki smo ju dobili (torej 1 in 343), sta res lihi. A to seveda še ni dokaz, da velja  $B \subseteq A$ .

Da bi to dokazali, je treba vzeti poljuben element množice  $B$ , torej poljuben  $m \in B$ , in pokazati, da je tedaj  $m$  vsebovan v množici  $A$ . Po definiciji množice  $B$  tedaj obstaja  $n \in \mathbb{Z}$ , da je

$$m = (2n - 1)^3.$$

Tedaj pa je

$$m = 8n^3 - 6n^2 + 12n - 1 = 2(4n^3 - 3n^2 + 6n) - 1,$$

kar je res liho število, saj je  $4n^3 - 3n^2 + 6n \in \mathbb{Z}$ . Tako je res  $m \in A$ . Ker je bil  $m$  poljuben element množice  $B$ , smo s tem dokazali, da velja

$$B \subseteq A.$$

■

## Aksiom o paru

Aksiom o paru zagotavlja, da lahko iz poljubnih dveh danih objektov tvorimo množico, ki vsebuje natanko ta dva elementa. V aksiomatski teoriji množic ga je v sodobni obliki prvi sistematično zapisal Ernst Zermelo (1908) kot enega temeljnih aksiomov svojega sistema.

**Aksiom o paru.** Za poljubna objekta  $a$  in  $b$  obstaja množica, ki vsebuje natanko elementa  $a$  in  $b$ :

$$\forall a \forall b \exists P \forall x (x \in P \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

*Primer 1.11.* Naj bosta  $a$  in  $b$  poljubna objekta.

Po aksiomu o paru obstaja množica  $P$ , za katero velja

$$P = \{a, b\}.$$

Če v aksiomu o paru vzamemo  $a = b$ , dobimo množico

$$\{a, a\} = \{a\},$$

torej enoelementno množico. S tem vidimo, da aksiom o paru omogoča konstrukcijo tako enoelementnih množic kot tudi množic z natanko dvema elementoma.

Aksiom o paru je zato temeljni gradnik pri tvorjenju končnih množic in skupaj z drugimi aksiomi omogoča sistematično izgradnjo bolj zapletenih množičnih struktur.

## Aksiom o uniji

Naj bosta  $A$  in  $B$  poljubni množici. Tedaj obstaja množica, katere elementi so natanko tisti elementi, ki pripadajo vsaj eni izmed množic  $A$  in  $B$ , to je, obstaja njuna unija  $A \cup B$ .

*Primer 1.12.* Naj bo  $A$  poljubna množica. Po aksiomu o paru tedaj obstaja množica  $\{A, A\} = \{A\}$ . Po aksiomu o uniji pa tedaj obstaja tudi množica  $A \cup \{A\}$ . Če za  $A$  vzamemo kar prazno množico  $\emptyset$ , dobimo množico

$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}.$$

Če zadevo ponovimo s to novo množico, dobimo množico

$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Nadaljujemo pa dobimo množico

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Po še enem koraku dobimo množico

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

Zadeve počasi postajajo precej nepregledne. A poanta tega zglada je naslednja. Opazimo lahko, da ima nastala množica v vsakem novem koraku en element več kot prejšnja. To pomeni, da lahko že ob predpostavki obstoja prazne množice z uporabo doslej sprejetih aksiomov dokažemo obstoj množice z enim elementom, z dvema elementoma, s tremi elementi, itd.

### 1.2.3 Osnovne operacije med množicami

V nadaljevanju definiramo nekatere temeljne operacije, s katerimi iz danih množic tvorimo nove množice. Te operacije omogočajo formalno opisovanje združevanja, presečišč, razlik in urejenih kombinacij elementov ter predstavljajo osnovno orodje pri matematični in ekonomski analizi.

**Definicija 1.4.** Naj bosta  $A$  in  $B$  množici. Osnovne operacije med množicami so:

- **unija:**

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ali } x \in B\},$$

- **presek:**

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ in } x \in B\},$$

- **razlika:**

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\},$$

- **simetrična razlika:**

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

- **kartezični produkt:**

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

*Primer 1.13.* Naj bo  $A = \{1, 2\}$  in  $B = \{2, 3\}$ . Tedaj:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad A \cap B = \{2\},$$

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{3\},$$

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

### 1.2.4 Univerzalna množica in komplement

Včasih predpostavimo, da vse množice, s katerimi delamo, ležijo znotraj neke »večje« množice  $U$ , ki ji rečemo *univerzum* ali *univerzalna množica*.

**Definicija 1.5** (Univerzalna množica). Univerzalna množica je množica  $U$ , ki vsebuje vse elemente, ki jih v danem kontekstu obravnavamo. Vsaka množica, ki nastopa v tem kontekstu, je podmnožica množice  $U$ , torej velja

$$A \subseteq U.$$

Univerzalna množica ni absolutni pojem. Vedno je določena glede na izbrani problem ali obravnavano množico objektov oz. prostor obravnave. V aksiomatski teoriji množic ne privzemamo obstoja »množice vseh množic«, temveč univerzalno množico vedno razumemo relativno na dano obravnavo.

*Primer 1.14.* Če je univerzalna množica  $U = \mathbb{R}$ , velja

$$A = (-\infty, 1), \quad A^c = [1, \infty).$$

**Izrek 1.4.** Naj bodo  $A, B$  in  $C$  poljubne podmnožice univerzalne množice  $U$ . Tedaj so resnične vse naslednje izjave:

1.  $\emptyset \subseteq A$  in  $A \subseteq A$ .
2.  $(A^c)^c = A$ ,  $A \cap A^c = \emptyset$  in  $A \cup A^c = U$ .
3.  $A \cup \emptyset = A$  in  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .
4.  $A \cup A = A$  in  $A \cap A = A$ .
5.  $A \cup B = B \cup A$  in  $A \cap B = B \cap A$ .
6.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  in  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
7.  $A \subseteq A \cup B$  in  $A \cap B \subseteq A$ .
8.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  in  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
9.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  in  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .
10.  $A \setminus B = A \cap B^c$ .
11.  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$ .

*Dokaz za (6).* Dokazali bomo enakost  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  z dokazom inkluzij. Naj bo  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Tedaj velja  $x \in A \cup B$  ali  $x \in C$ . Če je  $x \in A \cup B$ , potem je  $x \in A$  ali  $x \in B$ . V vsakem primeru je  $x \in A$  ali  $x \in B$  ali  $x \in C$ , zato je  $x \in A \cup (B \cup C)$ . S tem smo pokazali

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C).$$

Obratna inkluzija se dokaže povsem podobno. Naj bo  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Tedaj je  $x \in A$  ali  $x \in B \cup C$ . V prvem primeru je  $x \in A$  in zato  $x \in A \cup B$ , v drugem pa je  $x \in B$  ali  $x \in C$ , torej je  $x \in A \cup B$  ali  $x \in C$ . V vsakem primeru dobimo  $x \in (A \cup B) \cup C$ , zato

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C.$$

Obe inkluziji skupaj dasta enakost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Za enakost  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  je dokaz analogen. Naj bo  $x \in (A \cap B) \cap C$ . Tedaj  $x \in A \cap B$  in  $x \in C$ , torej  $x \in A$ ,  $x \in B$  in  $x \in C$ . Zato je  $x \in B \cap C$  in s tem  $x \in A \cap (B \cap C)$ , torej

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C).$$

Obratna inkluzija sledi iz povsem istega razmisleka v nasprotni smeri, zato

$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C.$$

Skupaj dobimo  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ . □

*Dokaz za (10).* Po definiciji je razlika množic

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Po drugi strani pa je komplement množice  $B$  (glede na univerzalno množico  $U$ ) množica

$$B^c = \{x \in U : x \notin B\}.$$

Zato je

$$A \cap B^c = \{x \in U : x \in A \text{ in } x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Vidimo, da imata množici  $A \setminus B$  in  $A \cap B^c$  enako množico elementov, torej sta enaki:

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

□

*Primer 1.15.* Naj bo  $U = \mathbb{R}$ ,

$$A = (-\infty, 1), \quad B = (0, \infty).$$

Potem je

$$A \cap B = (0, 1),$$

zato

$$(A \cap B)^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty).$$

Po drugi strani velja

$$A^c = [1, \infty), \quad B^c = (-\infty, 0],$$

in zato

$$A^c \cup B^c = (-\infty, 0] \cup [1, \infty),$$

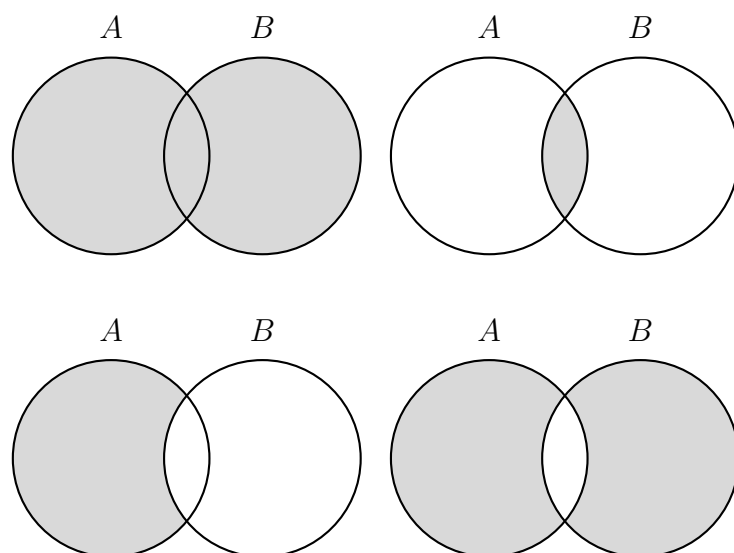
kar sovпада z  $(A \cap B)^c$ .

### 1.2.5 Ponazoritev množic

Ko obravnavamo odnose med množicami, nam je lahko v veliko pomoč predstavitev množic z diagrami, ki jih je okrog leta 1880 vpeljal britanski logik John Venn in jih zato danes imenujemo *Vennovi diagrami*. To storimo tako, da vsako množico, ki v tej obravnavi nastopa, predstavimo kot neko območje v ravnini (recimo krog ali elipso) in to na tak način, da so na dobljeni sliki predstavljena območja za vsako izmed možnih situacij glede vsebovanosti elementa v posameznih nastopajočih množicah.

Na primer, če obravnavamo množici  $A$  in  $B$ , je treba pripadajoča kroga narisati tako, da dobimo območje, ki predstavlja presek  $A \cap B$ , pa območji, ki predstavljata razliki  $A \setminus B$  in  $B \setminus A$ , in tudi območje, ki predstavlja elemente, ki ne pripadajo niti  $A$  niti  $B$ . Na sliki 1.1 so prikazani Vennovi diagrami, ki ponazarjajo unijo, presek, razliko in simetrično razliko dveh množic.

Takšne predstavitve so smiselne za situacije, v katerih nastopajo do največ štiri množice. Sicer je namreč pripadajočo sliko že zelo težko narisati (pri petih množicah bi morali prikazati kar 32 »območij«). Opozoriti velja še naslednje: Vennovi diagrami nikdar ne morejo služiti kot rigorozen dokaz neke trditve. So le v pomoč za lažje razumevanje problema ali konkretne situacije.



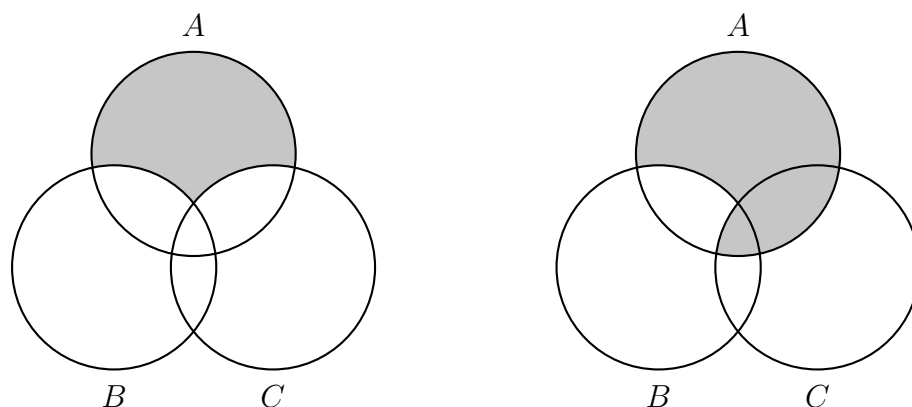
Slika 1.1: Ponazoritev množic  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  in  $A \Delta B$  z Vennovimi diagrami.

*Primer 1.16.* Ali za poljubno trojico množic  $A$ ,  $B$  in  $C$  velja

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)?$$

Če množici v splošnem nista enaki, ali velja vsaj katera izmed obeh možnih vsebovanosti?

Na sliki 1.2 so z Vennovima diagramoma ponazorjene množice  $A$ ,  $B$  in  $C$ . Leva slika prikazuje množico  $(A \setminus B) \setminus C$ , desna pa množico  $A \setminus (B \setminus C)$ . Iz prikaza lahko hitro razberemo razliko med obema izrazoma in preverimo, da enakost v splošnem ne velja.



Slika 1.2: Vennova diagrama, ki prikazujeta množici  $(A \setminus B) \setminus C$  in  $A \setminus (B \setminus C)$ .

Če si ogledamo pripadajoča Vennova diagrama, kaj hitro ugotovimo, da enakost v splošnem ne velja. Na podlagi Vennovih diagramov tudi zlahka konstruiramo ustrezen protprimer. Poskrbeti moramo le, da bo obstajal nek element, ki bo vsebovan v  $A \cap C$ . Dovolj je torej, na primer, vzeti

$$A = \{a\}, \quad B = \emptyset, \quad C = \{a\}.$$

Tedaj je

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus C = \emptyset \quad \text{in} \quad A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \emptyset = A = \{a\}.$$

Kako pa je z vsebovanostjo? Iz Vennovih diagramov sklepamo, da mora veljati

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

Zapišimo dokaz te trditve.

Po definiciji pojma podmnožice moramo za vsak  $x \in (A \setminus B) \setminus C$  pokazati, da pripada množici  $A \setminus (B \setminus C)$ . Pa naj bo  $x \in (A \setminus B) \setminus C$  poljuben. Tedaj je

$$x \in A \setminus B \quad \text{in} \quad x \notin C.$$

Torej je  $x \in A$ ,  $x \notin B$  ter  $x \notin C$ . Ker  $x$  ne pripada množici  $B$ , ne more pripadati niti množici  $B \setminus C$ . Ker pa je  $x \in A$ , torej res velja

$$x \in A \setminus (B \setminus C),$$

kot smo trdili. Ker je bil  $x \in (A \setminus B) \setminus C$  poljuben, smo s tem našo trditev dokazali. ■

### 1.2.6 Unija in presek družine množic

Doslej smo obravnavali unijo in presek dveh množic, pri čemer nismo potrebovali nobenih posebnih omejitev. Vendar pa se naravno zastavi vprašanje, kako definirati unijo in presek več kot dveh množic, torej celotne *družine množic*. V resnici smo že pri uniji dveh množic uporabili načelo, ki se neposredno sploši na poljubno število množic: element je v uniji, če pripada vsaj eni izmed množic, in v preseku, če pripada vsem obravnavanim množicam hkrati.

Ko namesto dveh množic obravnavamo poljubno indeksirano zbirko množic, je zato naravno govoriti o *uniji družine množic* in *preseku družine množic*. Namesto, da bi ločeno navajali operacije za dve, tri ali več množic, preprosto zapišemo definicijo, ki velja za poljubno – končno ali neskončno – družino množic.

**Definicija 1.6.** Naj bo  $I$  neka neprazna množica indeksov in za vsak indeks  $i \in I$  dana množica  $A_i$ . Tedaj definiramo:

- **unija družine množic**

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ za vsaj en } i \in I\},$$

- **presek družine množic**

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ za vsak } i \in I\}.$$

Množica indeksov  $I$  je lahko poljubna neprazna množica; elementi  $I$  niso nujno števila.

Definicija 1.6 jasno pokaže, da sta unija in presek družine množic tesno povezana z eksistenčnim in univerzalnim kvantifikatorjem:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I) (x \in A_i), \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I) (x \in A_i).$$

Če vse množice  $A_i$  obravnavamo kot podmnožice neke univerzalne množice  $U$ , se unija in presek družine množic lahko zapišeta tudi na naslednji način:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U : (\exists i \in I) x \in A_i\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in U : (\forall i \in I) x \in A_i\}.$$

V nadaljevanju bomo zapisali nekaj osnovnih lastnosti unije in preseka družin množic, ki predstavljajo naravno posplošitev lastnosti, ki smo jih že spoznali pri uniji in preseku dveh množic.

### Aksiom o uniji

Naj bo  $\{A_i : i \in I\}$  poljubna neprazna družina množic. Tedaj obstaja množica, ki vsebuje natančno tiste elemente, ki pripadajo vsaj eni množici iz te družine. Povedano drugače: unija  $\bigcup_{i \in I} A_i$  vedno obstaja.

### Osnovne lastnosti unije in preseka družine množic

**Izrek 1.5.** Naj bo  $\{A_i : i \in I\}$  poljubna neprazna družina podmnožic univerzalne množice  $U$ . Tedaj velja

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) \quad \text{in} \quad \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B).$$

*Dokaz.* Dokažimo najprej prvo enakost. Naj bo  $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B$ . Tedaj  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$  in hkrati  $x \in B$ . Po definiciji unije obstaja  $i \in I$  tako, da  $x \in A_i$ , zato je  $x \in A_i \cap B$ . S tem dobimo  $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ , kar dokazuje inkluzijo

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B \subseteq \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B).$$

Obratno, naj bo  $x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$ . Tedaj obstaja  $i \in I$ , da je  $x \in A_i \cap B$ , torej  $x \in A_i$  in  $x \in B$ . Od tod sledi  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$  in s tem

$$x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B.$$

S tem smo dokazali prvo enakost.

Druga enakost,

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B),$$

se dokaže popolnoma analogno, le da v razmisleku uporabimo lastnosti operatorja  $\cup$  namesto  $\cap$ . S tem je trditev dokazana.  $\square$

**Izrek 1.6.** Naj bo  $\{A_i : i \in I\}$  poljubna neprazna družina podmnožic univerzalne množice  $U$ . Tedaj velja

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \text{in} \quad \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

*Dokaz.* Dokazali bomo obe enakosti z argumentom »element za elementom«.

**Prva enakost.** Najprej dokažimo

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Naj bo  $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c$ . To pomeni, da  $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ . Po definiciji unije to pomeni, da za noben  $i \in I$  ne velja  $x \in A_i$ , torej za vsak  $i \in I$  velja  $x \notin A_i$ . Zapisano z množicami to pomeni, da je  $x \in A_i^c$  za vsak  $i \in I$ , zato

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

S tem imamo inkluzijo

$$\left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i^c.$$

Obratno, naj bo  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$ . Tedaj je  $x \in A_i^c$  za vsak  $i \in I$ , kar pomeni, da za vsak  $i \in I$  velja  $x \notin A_i$ . Zato  $x$  ne pripada nobeni množici  $A_i$  in sledi  $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ , torej

$$x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c.$$

Dobili smo tudi obratno inkluzijo

$$\bigcap_{i \in I} A_i^c \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c.$$

Skupaj obe inkluziji dasta prvo enakost.

**Druga enakost.** Sedaj dokažimo

$$\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Naj bo  $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c$ . To pomeni, da  $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ . Po definiciji preseka to pomeni, da ne velja, da je  $x$  v vseh množicah  $A_i$ , torej obstaja vsaj en indeks  $i_0 \in I$ , za katerega velja  $x \notin A_{i_0}$ . Od tod sledi  $x \in A_{i_0}^c$  in zato

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

S tem smo pokazali inkluzijo

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Obratno, naj bo  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$ . Tedaj obstaja  $i_0 \in I$ , da je  $x \in A_{i_0}^c$ , torej  $x \notin A_{i_0}$ . Zato  $x$  ne more pripadati preseku  $\bigcap_{i \in I} A_i$ , saj v preseku morajo biti elementi, ki pripadajo vsem množicam  $A_i$ . Sledi

$$x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \iff x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c.$$

Tako dobimo tudi obratno inkluzijo

$$\bigcup_{i \in I} A_i^c \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c.$$

Ker za obe enakosti veljata obe inkluziji, je trditev v celoti dokazana.  $\square$

### 1.2.7 Potenčna množica in kartezični produkt

V prejšnjih razdelkih smo videli več načinov, kako lahko iz danih množic z uporabo aksiomov teorije množic konstruiramo nove množice. V tem razdelku bomo dodali še dva temeljna postopka: tvorjenje potenčne množice in tvorjenje kartezičnega produkta.

Ideja potenčne množice izhaja iz opazke, da je vsaka podmnožica dane množice sama po sebi matematični objekt. Naravno vprašanje je, ali lahko »zberemo« vse podmnožice množice  $A$  v eno samo množico. Po aksiomu o podmnožici za vsako logično lastnost elementov množice  $A$  obstaja množica vseh elementov  $A$ , ki to lastnost izpolnjujejo. Tako lahko različne podmnožice množice  $A$  združujemo v vedno večje množice, dokler ne dobimo množice vseh njenih podmnožic. Temu objektu pravimo *potenčna množica* množice  $A$ .

**Definicija 1.7.** Naj bo  $A$  množica. Potenčna množica  $\mathcal{P}(A)$  je množica vseh podmnožic množice  $A$ .

**Izrek 1.7.** Naj bo  $A$  množica. Potenčna množica  $\mathcal{P}(A)$  je neprazna.

*Dokaz.* Ker je  $\emptyset$  podmnožica poljubne množice  $A$ , je  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ . Zato je  $\mathcal{P}(A)$  neprazna.  $\square$

*Primer 1.17.* Naj bo  $A = \{a, b\}$ . Tedaj je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Če tvorimo potenčno množico množice  $\mathcal{P}(A)$ , dobimo množico vseh podmnožic množice  $\mathcal{P}(A)$ , ki vsebuje 16 elementov. Da je število tako veliko, ni naključje: če ima  $A$  natanko  $n$  elementov, potem ima  $\mathcal{P}(A)$  natanko  $2^n$  elementov.

Pri končnih množicah je to število enostavno določljivo, pri neskončnih množicah pa postane vprašanje obstoja potenčne množice bistveno zahtevnejše in zahteva poseben aksiom.

### Aksiom o potenčni množici

Za poljubno množico  $A$  obstaja množica vseh njenih podmnožic. To množico imenujemo potenčna množica množice  $A$  in jo označimo z  $\mathcal{P}(A)$ .

Ta aksiom zagotavlja, da obstajajo npr. potenčna množica naravnih števil, potenčna množica realnih števil in druge zelo velike množice, ki imajo ključno vlogo v analizi, topologiji in teoriji mer. Obseg takšnih množic je bil predmet raziskovanja Georga Cantorja, po katerem je poimenovan tudi slavni Cantorjev izrek o velikosti potenčnih množic.

**Definicija 1.8** (Kardinalnost množice). Naj bosta  $A$  in  $B$  množici. Pravimo, da imata množici  $A$  in  $B$  enako *kardinalnost*, če obstaja bijekcija med  $A$  in  $B$ . Kardinalnost množice  $A$  označimo z  $|A|$ .

Intuitivno kardinalnost množice razumemo kot število njenih elementov. Pri končnih množicah se kardinalnost ujema z običajnim štetjem elementov, pri neskončnih množicah pa se kardinalnost določa s primerjavo množic prek bijekcij.

**Izrek 1.8** (Cantorjev izrek). Naj bo  $A$  poljubna množica. Tedaj ima njena potenčna množica  $\mathcal{P}(A)$  strogo večjo kardinalnost kot množica  $A$ . Natančneje, ne obstaja bijekcija med  $A$  in  $\mathcal{P}(A)$ , oziroma

$$|A| < |\mathcal{P}(A)|.$$

Cantorjev izrek velja za končne in neskončne množice ter kaže, da ne obstaja »največja« množica, saj lahko iz vsake množice s tvorbo potenčne množice dobimo strogo večjo množico.

Cantorjev izrek ima temeljne posledice za teorijo množic in matematiko nasploh. Med drugim vodi do hierarhije neskončnih kardinalnosti in pokaže, da obstajajo različne stopnje neskončnosti.

*Primer 1.18.*

1. Naj bo  $A = \{a, b\}$ . Množica  $A$  ima natanko dva elementa, zato je

$$|A| = 2.$$

2. Naj bo  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Ker ima množica  $B$  pet elementov, velja

$$|B| = 5.$$

3. Naj bo  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  množica naravnih števil in naj bo

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

množica sodih naravnih števil. Čeprav je  $E$  prava podmnožica množice  $\mathbb{N}$ , imata množici  $E$  in  $\mathbb{N}$  enako kardinalnost. To pokažemo z bijekcijo

$$f : \mathbb{N} \rightarrow E, \quad f(n) = 2n.$$

Zato velja

$$|E| = |\mathbb{N}|.$$

**Izrek 1.9.** Naj bosta  $A$  in  $B$  množici. Tedaj velja

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad \text{in} \quad \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B).$$

Enakost  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$  v splošnem ne velja.

*Dokaz.* Če je  $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ , je  $X \subseteq A \cap B$ , zato je  $X \subseteq A$  in  $X \subseteq B$ , torej  $X \in \mathcal{P}(A)$  in  $X \in \mathcal{P}(B)$ . S tem smo dobili prvo inkluzijo. Obratno, če  $X$  pripada obema potenčnima množicama, je hkrati podmnožica  $A$  in podmnožica  $B$ , od koder sledi  $X \subseteq A \cap B$ .

Druga trditev sledi neposredno iz dejstva, da je vsaka podmnožica  $A$  ali  $B$  tudi podmnožica  $A \cup B$ .

Protiprimer za enakost:  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ . Tedaj  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ , medtem ko  $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ .  $\square$

## Kartezični produkt

V mnogih vejah matematike potrebujemo pojem urejenih parov, urejenih trojic in na splošno urejenih  $n$ -teric. Pri tem je ključno, da zmoremo razlikovati med urejenim parom  $(x, y)$  in množico  $\{x, y\}$ , saj ta ne vsebuje informacije o vrstnem redu elementov.

Intuitivno je urejeni par  $(x, y)$  strukturiran objekt, v katerem ločimo prvi element od drugega. Da tak objekt natančno opišemo v jeziku aksiomske teorije množic, uporabimo *standardno definicijo urejenega para* poljskega matematika Kazimierza Kuratowskega, ki se glasi

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Kuratowski je bil eden izmed vodilnih predstavnikov varšavske šole matematike, ki je pomembno prispeval k razvoju teorije množic, topologije in matematične logike. Definicija Kuratowskega zagotavlja lastnost urejenih parov, ki je predstavljena v naslednjem izreku.

**Izrek 1.10.** Za poljubna urejena para  $(a, b)$  in  $(c, d)$  velja:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d.$$

**Definicija 1.9.** Naj bosta  $A$  in  $B$  poljubni množici. *Kartezični produkt* množic  $A$  in  $B$  je množica

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \},$$

ki sestoji iz vseh urejenih parov, pri katerih prvi element pripada množici  $A$  drugi pa množici  $B$ . Množico  $A \times A$  včasih krajše označimo kar z  $A^2$ .

*Primer 1.19.* Naj bo  $A = \{1, 2\}$  in  $B = \{a, b, c, d\}$ . Tedaj je

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)\}.$$

Vidimo, da ima  $A \times B$  natanko 8 elementov, kar je produkt kardinalnosti obeh množic. Za končne množice to vedno drži:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Kako zagotovimo, da kartezični produkt množic sploh obstaja? Ker je vsak urejeni par element potenčne množice  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ , po aksiomih o uniji, podmnožici in potenčni množici obstaja množica, ki vsebuje vse takšne urejene pare. Zato za obstoj kartezičnega produkta  $A \times B$  ne potrebujemo posebnega novega aksioma. V nadaljevanju si ogledamo nekaj osnovnih primerov in temeljnih lastnosti kartezičnih produktov.

**Izrek 1.11.** Naj bosta  $A$  in  $B$  poljubni množici. Kartezični produkt  $A \times B$  je prazen natanko tedaj, ko je vsaj ena izmed množic  $A$  ali  $B$  prazna.

*Dokaz.* Če je kateri od množic prazna, recimo  $A = \emptyset$ , potem ni nobenega para  $(a, b)$  s  $a \in A$ , zato je  $A \times B = \emptyset$ .

Obratno, če je  $A \times B = \emptyset$  in bi bili  $A$  ter  $B$  neprazni, bi lahko izbrali  $a \in A$  in  $b \in B$  ter dobili urejeni par  $(a, b)$ , ki bi moral biti element  $A \times B$ , kar je protislovje.  $\square$

**Izrek 1.12.** Naj bodo  $A, B, C, D$  neprazne množice. Tedaj velja:

$$A \times B = C \times D \iff A = C \text{ in } B = D.$$

*Dokaz.* Če sta  $A = C$  in  $B = D$ , je enakost kartičnih produktov trivialna.

Obratno, predpostavimo  $A \times B = C \times D$ . Ker sta množici neprazni, lahko za poljubni  $a \in A$  izberemo  $b \in B$  in dobimo  $(a, b) \in A \times B = C \times D$ , zato je  $a \in C$ . Torej  $A \subseteq C$ . Popolnoma simetrično dobimo  $C \subseteq A$ , od koder sledi  $A = C$ . Z enakim argumentom dobimo tudi  $B = D$ .  $\square$

**Izrek 1.13.** Naj bodo  $A, B, C, D$  poljubne množice. Tedaj velja

$$(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$$

in

$$(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D).$$

*Dokaz.* Prvi del:

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

pomeni, da je  $(x, y)$  hkrati v  $A \times C$  in  $B \times D$ . Zato je  $x \in A$  in  $x \in B$ , torej  $x \in A \cap B$ , ter hkrati  $y \in C$  in  $y \in D$ , torej  $y \in C \cap D$ . Od tod sledi

$$(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D).$$

Vsa sklepanja so ekvivalentna, zato je enakost dokazana v obe smeri.

Za drugo trditev zadostuje opaziti: Če je  $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D)$ , potem je

$$x \in A \text{ in } y \in C, \quad \text{ali pa} \quad x \in B \text{ in } y \in D.$$

V prvem primeru je  $(x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$ , v drugem prav tako. Zato celotna unija leži v desni množici.  $\square$

V matematiki pogosto obravnavamo množice, ki imajo neskončno mnogo elementov, na primer množico naravnih števil, celih števil ali realnih števil. Da bi bil obstoj takšnih množic v okviru aksiomske teorije množic zagotovljen in ne le intuitivno privzet, je potrebno uvesti poseben aksiom, ki formalno zagotavlja obstoj vsaj ene neskončne množice.

### Aksiom o neskončnosti

Obstaja množica  $A$ , ki ima naslednji dve lastnosti:

- (i)  $\emptyset \in A$ .
- (ii) Za vsak  $X \in A$  velja tudi  $X \cup \{X\} \in A$ .

Ta množica  $A$  tako vsebuje elemente

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

Izkaže se, da je vsaka množica  $A$ , ki zadošča aksiomu o neskončnosti, neskončna - od tod tudi ime aksioma.

Kot smo že nakazali ob sprejetju aksioma o uniji, lahko na podlagi tega aksioma zgradimo tudi naravna števila. Pri tem množico

$$\emptyset \text{ označimo z } 0, \quad \{\emptyset\} \text{ z } 1, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ z } 2,$$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \text{ s } 3, \dots$$

in tako naprej.

Prva natančnejša razprava o neskončnih množicah sega v konec 19. stoletja, ko je Georg Cantor razvil teorijo kardinalnosti in pokazal, da obstajajo neskončne množice različnih velikosti. Njegovi rezultati so bili revolucionarni, hkrati pa so razkrili številne logične težave, ki jih takratni matematični formalizem ni znal pojasniti.

Pomemben vpogled je prispeval tudi Richard Dedekind, ki je leta 1888 uvedel svojo znano *definicijo neskončne množice*. Po Dedekindu je množica  $S$  neskončna natanko tedaj, ko obstaja bijekcija med  $S$  in neko njeno pravo podmnožico. To pomeni, da se množica lahko »preslika sama vase«, pri čemer se nekateri elementi izgubijo, pa vendar ostane enako velika. Dedekindova definicija ni le intuitivna, temveč razkrije značilno strukturo neskončnih množic, ki se bistveno razlikuje od končnih.

Toda Dedekindova definicija sama po sebi ne zagotovi obstoja neskončnih množic; pove nam le, katera množica *bi* bila neskončna, če bi obstajala. Ob prelomu prejšnjega stoletja se je izkazalo, da je za izgradnjo analize, aritmetike naravnih števil in teorije funkcij nujno potrebna formalna predpostavka, ki zagotavlja obstoj vsaj ene neskončne množice.

To vprašanje je kot osrednje izpostavil Ernst Zermelo, eden ključnih arhitektov moderne aksiomske teorije množic. Leta 1908 je v svojem znamenitem članku *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* predstavil aksiomatski sistem, ki je postal temelj kasnejše teorije Zermelo–Fraenkel (ZF).

Ker iz ostalih aksiomov (aksioma o uniji, aksioma o paru, aksioma o podmnožici, aksioma o potenčni množici itd.) ni mogoče izpeljati obstoja neskončnih množic, je Zermelo uvedel poseben aksiom, danes imenovan *aksiom o neskončnosti*. Ta aksiom eksplicitno postulira obstoj množice, ki vsebuje  $\emptyset$  ter skupaj z vsakim elementom  $X$  tudi množico  $X \cup \{X\}$ , kar omogoča rekurzivno gradnjo zaporedja objektov:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots$$

in s tem tudi izgradnjo množice naravnih števil v Cantor–Dedekindovem slogu.

Zermelov aksiom o neskončnosti tako zagotavlja nekaj, česar Dedekindova definicija ne more: ne le karakterizacijo, temveč tudi *obstoj* neskončnih množic. Skupaj tvorita elegantno zgodbo: Dedekind poda idejo, kaj neskončnost *je*, Zermelo pa vpelje formalni aksiom, ki omogoča, da takšne množice dejansko obstajajo znotraj aksiomskega sistema.

### 1.2.8 Množice v ekonomiji

Matematična teorija množic predstavlja enega temeljnih jezikov sodobne ekonomske analize. Že od sredine 20. stoletja naprej ekonomisti čedalje pogosteje uporabljajo množice, relacije, preslikave in topološke pojme kot orodja za formalizacijo ekonomskih izbir, preferenc in omejitev. Še posebej po prispevkih Johna von Neumanna in Oskarja Morgensterna na področju teorije iger, Kennetha J. Arrowa in Gérarda Debreuja pri aksiomatski obravnavi splošnega ravnotežja ter Tjallinga C. Koopmansa v teoriji proizvodnje in optimalne alokacije virov je teorija množic postala standardni matematični aparat mikroekonomije, teorije iger in teorije splošnega ravnotežja. Kot poudarja John A. Schultz (1979), v svojem delu *The Development of Set Theory and its Application to Economic Analysis*, uvedba množic v ekonomijo ni pomenila zapletenejše matematike, temveč obratno - prehod od računanja k bolj osnovnim in temeljnim pojmom, ki omogočajo večjo jasnost, splošnost in logično strogo analizo.

V ekonomiji so odločitev, izbira ali proizvodnja vedno opisane kot elementi nekega prostora možnosti. Ti prostori so po navadi množice v  $\mathbb{R}^n$ , npr. množice potrošnih

košaric, množice tehnično izvedljivih proizvodnih kombinacij ali množice cen. Z uporabo teorije množic lahko:

- natančno opredelimo *izbire* (kot elemente),
- modeliramo *možne kombinacije dobrin* (kot podmnožice prostora),
- formuliramo *omejitve* potrošnikov in proizvajalcev (kot proračunske ali proizvodne množice),
- preučujemo *ravnotežja in optimume* s pomočjo preslikav in presečišč množic,
- uporabimo topološke lastnosti (kompaktnost, konveksnost) za dokaze o obstoju rešitev.

Sledi pregled ključnih ekonomskih konceptov, ki so naravno izraženi s teorijo množic.

### Indiferenčne krivulje kot množice potrošniških košaric

Naj bo  $U : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  potrošnikova uporabnostna funkcija. Za dano raven koristnosti  $k$  definiramo *indiferenčno množico*

$$I(k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : U(x, y) = k\}.$$

Vsaka indiferenčna krivulja je torej množica potrošnih košaric, ki potrošniku zagotavljajo enako raven zadovoljstva. Te množice imajo značilne lastnosti:

- so navzdol odprte:

$$U(x, y) \geq k \Rightarrow (x, y) \in \{U \geq k\},$$

- običajno so *konveksne*, kar odraža padajočo mejno stopnjo substitucije,
- višje indiferenčne množice  $I(k')$  z  $k' > k$  predstavljajo večjo koristnost.

Konveksnost množic  $\{U \geq k\}$  in  $\{U = k\}$  je matematična formulacija ekonomske predpostavke, da potrošniki preferirajo raznolikost.

### Proračunske množice

Pri danih cenah  $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}_+^2$  in dohodku  $m > 0$  definiramo *proračunsko množico*

$$B(p, m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : p_1x + p_2y \leq m\}.$$

Lastnosti proračunske množice:

- gre za zaprto, omejeno in konveksno množico v  $\mathbb{R}_+^2$ ,
- mejna množica

$$p_1x + p_2y = m$$

opisuje *proračunsko premico*,

- spremembe cen ali dohodka povzročijo translacijo ali rotacijo množice  $B(p, m)$ ,
- optimalna izbira potrošnika je presečišče množice  $B(p, m)$  z najvišjo dosegljivo indiferenčno množico.

Geometrijsko gre za iskanje točke:

$$(x^*, y^*) \in B(p, m) \quad \text{takšne, da} \quad U(x^*, y^*) = \max_{(x,y) \in B(p,m)} U(x, y).$$

Ta optimizacijski problem je standardno formuliran izključno v jeziku množic.

### Proizvodne množice in proizvodne možnosti

Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$  množica vseh tehnično možnih izhodov in vhodov (proizvodni sklop). Element  $y = (y_1, \dots, y_n)$  opisuje raven proizvodnje vsake dobrine.

- Množica  $Y$  je običajno *konveksna*, kar formalizira padajoče donose in možnost kontinuiranega prilagajanja vhodov.
- *Mejna množica*  $\partial Y$  predstavlja proizvodno možnostno mejo (PPF).
- Konkavnost PPF odraža naraščajoče oportunitetne stroške.

V dveh dimenzijah pišemo:

$$\text{PPF} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : F(x, y) = 0\},$$

kjer  $F$  implicitno definira mejo tehnološko izvedljivih kombinacij.

To omogoča naravno formulacijo:

$$Y = \{(x, y) : F(x, y) \leq 0\}, \quad \text{učinkovite točke} = \partial Y.$$

### Ekonomija kot sistem preseka množic

Velik del mikroekonomije je iskanje preseka različnih množic:

$$\begin{aligned} \text{Ravnotežje:} & \quad \text{povpraševanje}(p) \cap \text{ponudba}(p) \neq \emptyset, \\ \text{Optimum:} & \quad B(p, m) \cap I(k) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

Pareto optimum:  $\bigcap_{i=1}^n P_i$  brez izboljšljivih točk.

Pri analizi splošnega ravnotežja se uporabljajo strožje lastnosti množic (konveksnost, kompaktnost, zaprte preslikave), ki omogočijo uporabo fiksnih točk (Kakutani, Brouwer) za izrek o obstoju ravnotežja (Arrow–Debreu).

### Pomen množic za sodobno ekonomsko analizo

Uvedba teorije množic v ekonomijo je bila ključna za:

- formalno opredelitev ekonomskih pojmov,
- izboljšanje logične rigoroznosti mikroekonomije,
- opustitev prekomerne odvisnosti od diferencialnega računa,
- razvoj teorije iger, teorije ravnotežja in javnega odločanja,
- prehod k abstraktnim, vendar intuitivnim modelom.

Pristop skozi teorijo množic omogoča, da so ekonomski modeli obenem *enostavnejši* in *bolj splošni*. Formulacije, osnovane na množicah, neposredno pokažejo naravne strukture odločanja: možnosti, izbire, omejitve in ravnotežja.

To poglavje predstavlja osnovo za razumevanje vseh nadaljnjih vsebin: preslikav, funkcij, limit, zaporedij, odvoda in integrala. Logika omogoča natančno matematično razmišljanje, množice pa tvorijo osnovni prostor, v katerem se bodo gradili vsi kasnejši pojmi.

### Naloge

1. (Osnovne operacije z množicami) Dane so množice

$$A = \{2n : n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 10\}, \quad B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 8\},$$

$$C = \{3n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 7\}.$$

Zapišite elemente množic:

$$B \cap C, \quad C \setminus A, \quad (A \cup C) \setminus B.$$

2. (Univerzalna množica) Naj bo

$$U = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 9\}$$

univerzalna množica, ter

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n < 7\}, \quad B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\},$$

$$C = \{3n : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 3\}.$$

Zapišite elemente množic:

$$A \cap B, \quad A \cup C, \quad B \setminus C, \quad A^c, \quad (B \cup C) \setminus A, \quad (B^c) \setminus (A \cap C)^c.$$

3. **(Iskanje množice z danimi pogoji)** Naj bodo

$$A = \{3, 5, 7\}, \quad B = \{1, 2, 4, 6\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Določite najmanjšo množico  $R$ , da bo izpolnjena vsaj ena izmed enakosti:

$$(a) A \cap R = \{3, 5\}, \quad (b) B \cap R = A,$$

$$(c) B \cup R = C, \quad (d) C \cap R = B.$$

4. **(Vennovi diagrami)** Z Vennovim diagramom označite množice:

$$(a) ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) \setminus A, \quad (b) ((B \cap C) \setminus A) \cup (A \setminus B),$$

$$(c) ((A \cup C) \setminus B) \cap (A \cap C).$$

5. **(Socialna omrežja med študenti)** Na predavanju je 50 študentov. Med njimi ima 26 študentov svoj profil na Facebooku, na Instagramu 18 študentov, na LinkedIn 16 študentov, na Facebooku in Instagramu 3 študenti, na Facebooku in LinkedInu 9, Instagramu in LinkedInu 6, na vseh treh socialnih platformah pa le en študent.

- (a) Koliko študentov nima profila na nobeni platformi?  
 (b) Koliko študentov ima profil na Facebooku ali Instagramu, vendar ne na LinkedInu?

6. **(Naročnine podjetij)** Med 26 podjetji je 16 podjetij naročenih na Storitvev A, 11 na Storitvev B in 9 na Storitvev C. Na storitev A in B je naročenih 5 podjetij, na storitev A in C je naročenih 6 podjetij, na storitev B in C pa 3, na vse tri storitve sta naročeni 2 podjetji.

- (a) Koliko podjetij ni naročeno na nobeno storitev?  
 (b) Koliko podjetij je naročeno na A ali B, ne pa tudi na C?  
 (c) Koliko podjetij je naročeno na C ali B, ne pa na A?

7. **(Izobraževanje zaposlenih)** Zaposleni v podjetju HiTechx se udeležujejo različnih izobraževanj, in sicer iz računalništva, komunikacije s strankami in tujih jezikov. Vodstvo podjetja ugotavlja, da se 10 zaposlenih ne udeležuje nobenih izobraževanj. Izobraževanj iz računalništva se udeležuje 15 zaposlenih, izobraževanj iz komunikacije s strankami 14 zaposlenih, tujih jezikov pa se uči 12 zaposlenih. Pri tem se 8 zaposlenih udeležuje izobraževanj iz računalništva in komunikacije s strankami, 5 zaposlenih računalništva in tujih jezikov, komunikacije s strankami in tujih jezikov 5 zaposlenih, vseh treh izobraževanj pa se udeležuje en zaposlen.

- (a) Koliko je vseh zaposlenih?  
 (b) Koliko zaposlenih obiskuje samo izobraževanje komunikacije s strankami?  
 (c) Koliko zaposlenih obiskuje izobraževanje iz računalništva ali komunikacije s strankami, ne pa tudi tujih jezikov?

8. Naj bo  $A = \{1, 2, 3\}$ . Zapišite potenčno množico  $\mathcal{P}(A)$  in določite njeno kardinalnost. Koliko elementov ima potenčna množica  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ ?
9. Naj bosta  $A = \{a, b\}$  in  $B = \{0, 1, 2\}$ . Zapišite kartezični produkt:

$$A \times B, \quad B \times A.$$

Ali velja  $A \times B = B \times A$ ? Utemeljite.

10. Naj bo  $A = \{1, 2\}$  in  $B = \{x, y, z\}$ . Določite množice:

$$\mathcal{P}(A \times B), \quad \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B).$$

Ali velja enakost  $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ? Razložite.

11. Naj bo  $A$  množica. Dokažite:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|},$$

če je  $A$  končna množica. (Namig: začnite s primeroma  $|A| = 0$  in  $|A| = 1$  ter uporabite indukcijo.)

12. Naj bosta  $A$  in  $B$  neprazni množici. Dokažite, da iz  $A \times B = B \times A$  sledi  $A = B$ .
13. Naj bo  $A$  neskončna množica. Ali je lahko  $\mathcal{P}(A)$  končna? Utemeljite odgovor. (Namig: uporabite Cantorjev argument o diagonalizaciji.)
14. Naj bo  $A = \mathbb{N}$  (množica naravnih števil) in  $B = \{0, 1\}$ . Zapišite opis množice

$$B^A = \{f : A \rightarrow B\},$$

in pojasnite, kakšni tipi preslikav so elementi te množice. Koliko elementov ima  $B^A$ ?

15. Naj bo potrošnikov proračunski sklop

$$B(p, m) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : p_1x + p_2y \leq m\}.$$

Za več različnih cen  $(p_1, p_2)$  grafično (ali opisno) opredelite:

$$B(p, m_1) \subseteq B(p, m_2).$$

Za katere vrednosti  $m_1 < m_2$  velja vsebovanost? Pojasnite ekonomski pomen inkluzije.

16. Naj  $I(k)$  označuje indiferenčno množico potrošnika z uporabnostno funkcijo  $U$ . Predpostavite, da sta za dva nivoja koristnosti  $k < k'$  množici  $I(k)$  in  $I(k')$  disjunktni. Pokažite, da iz strogo naraščajočih preferenc sledi:

$$I(k) \subset \{U < k'\}.$$

Pojasnite ekonomski pomen odnosa med tema množicama.

17. Naj bo  $Y \subseteq \mathbb{R}_+^2$  množica vseh tehnično možnih proizvodnih kombinacij dveh dobrin. Množica učinkovito izvedljivih točk je definirana kot:

$$E = \{y \in Y : \nexists y' \in Y \text{ s } y' \geq y \text{ in } y' \neq y\}.$$

- (a) Besedno opišite množico  $E$ .
- (b) Pojasnite, zakaj predstavlja  $E$  »mejo« proizvodnih možnosti.
- (c) Podajte primer dveh množic  $Y_1$  in  $Y_2$ , za kateri velja  $Y_1 \subset Y_2$ , vendar  $E_1 \not\subset E_2$ .

# Poglavje 2

## Številske množice

### Uvod

Števila so eden najpomembnejših dosežkov človeškega intelekta in temelj matematike, kakršno poznamo danes. Njihova vloga presega zgolj orodje za štetje in merjenje: števila so konceptualni okvir, prek katerega opisujemo naravne pojave, formuliramo zakone fizike, gradimo matematične teorije in razvijamo abstraktne modele. Razvoj pojma števila je potekal počasi, skozi tisočletja civilizacijskega napredka, od prvih praktičnih potreb po štetju in merjenju do današnje abstraktne teorije števil, ki zajema realna, kompleksna in celo mnogo širša številska področja.

Že v starem Egiptu in Mezopotamiji srečamo razvite računske postopke, desetiške ali delno pozicijske sisteme, ulomke ter osnovne algebralne pojme, kar dokazujejo Rhindov in Moskovski papirus. Ti zapisi kažejo, da je bilo računanje s števili neposredno povezano s praktičnimi potrebami: gradnjo, pobiranjem davkov, geometrijo polj, astronomijo in trgovino. Kljub temu pa števila v tem obdobju še niso bila razumljena kot abstraktni objekti.

Antična Grčija je prinesla znatno spremembo: Pitagora in njegova šola sta štela števila za temelj narave, Evklid pa je v *Elementih* prvič sistematično prikazal teorijo števil, vključno z izreki o deljivosti in praštevilih. Grki so številom pripisovali geometrijski značaj; racionalna števila so predstavljali kot razmerja dolžin, neracionalna pa so odkrili s tem, ko so spoznali, da diagonala kvadrata ni merljiva z osnovno enoto - kar je en prvih korakov proti razumevanju realnih števil.

V srednjem veku in kasneje so indijski in islamski matematiki razvili pozicijski zapis, prinesli pojem ničle, uvedli negativna števila ter razvili algebro. V evropski renesansi in novem veku je postalo jasno, da racionalna števila ne zadostujejo za opis vseh rešitev algebrskih enačb. Tako je nastalo sistematično urejanje številske premice in kasneje celotnega sistema realnih števil, ki so bila v 19. stoletju natančno definirana z Dedekindovimi rezi ali Cauchyjevimi zaporedji. S tem so realna števila dobila svojo ključno lastnost: popolnost, ki omogoča analizo - teorijo limit, zveznosti, integralov in odvodov.

Kompleksna števila so še korak dlje: z uvedbo imaginarne enote  $i$  in z geometrijskim pogledom Arganda in Gaussa so dobila jasen algebralni in geometrijski pomen.

Kompleksna ravnina omogoča reševanje vsakršnih polinomskih enačb, opisovanje nihanj, signalov, valovanj in kvantnih stanj. Danes je množica kompleksnih števil  $\mathbb{C}$  najpomembnejši številski sistem v matematični analizi in fiziki, saj tvori algebrsko zaprto polje in se naravno povezuje z geometrijo, topologijo in teorijo funkcij.

Razvoj številskih množic tako predstavlja naravno zaporedje razširitev:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$

pri čemer se vsaka nova množica pojavi kot nujna rešitev prej nerešljivih problemov: od odštevanja, do merjenja, do iskanja limit, do reševanja enačb, katerih rešitev ni mogoče zapisati z realnimi števili. V sodobnem matematičnem jeziku števila razumemo kot elemente natančno določenih množic, opremljenih z algebraičnimi in topološkimi strukturami, ki omogočajo operacije, urejenost, razdaljo in konvergenco.

V tem poglavju bomo zato sistematično obravnavali temeljne številске množice in metode, ki so z njimi neločljivo povezane. Najprej bomo spoznali matematično indukcijo, osnovno metodo dokazovanja izrekov o naravnih številih. Nato bomo formalno opredelili realna števila, njihove lastnosti in absolutno vrednost ter končno uvedli kompleksna števila, njihov algebraični in geometrijski pomen ter polarni zapis. Ta uvod predstavlja osnovo, na kateri sloni celotna sodobna matematična analiza.

## 2.1 Naravna števila in matematična indukcija

### 2.1.1 Naravna števila

Naravna števila predstavljajo osnovo za štetje in zaporedno razporejanje objektov. Običajno jih označimo z

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},$$

čeprav nekateri avtorji vključijo tudi število 0. V tem učbeniku bomo sledili Peanovi definiciji naravnih števil, kjer se zaporedje začne s številom 1.

Naravna števila niso le intuitivni pojem, temveč jih lahko natančno opišemo z naslednjimi aksiomi.

### 2.1.2 Peanovi aksiomi

Peanovi aksiomi (imenovani po italijanskem matematiku Giuseppeju Peanu, 1858–1932) formalno določajo strukturo naravnih števil. Naj bo  $n^+$  naslednik števila  $n$ . Tedaj veljajo:

1. 1 je naravno število.
2. Vsako naravno število  $n$  ima naslednika  $n + 1$ , ki je tudi naravno število.
3. Naravno število 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.
4. Če je  $n + 1 = m + 1$ , potem je  $n = m$ .

5. (Aksiom o matematični indukciji) Vsaka podmnožica naravnih števil, ki vsebuje število 1 in skupaj z vsakim številom  $n$  vsebuje tudi njegov naslednik  $n + 1$ , vsebuje vsa naravna števila.

Aksiom V je osnova *matematične indukcije* in predstavlja logični princip, s katerim dokazujemo trditve o  $\mathbb{N}$ .

### 2.1.3 Praštevila in sestavljena števila

Praštevila imajo v aritmetiki posebno mesto, saj so osnovni gradniki naravnih števil. Vsako naravno število, večje od 1, lahko zapišemo kot produkt praštevil, zato jih je že Evklid v 3. stoletju pr. n. št. opisoval kot temelj aritmetične strukture. Kasneje so jih podrobno preučevali Pierre de Fermat (1601 - 1665), Leonhard Euler (1707–1783) in Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), v sodobnem času pa so praštevila dobila povsem novo vlogo: postala so ključni del informacijske varnosti in kriptografije.

**Definicija 2.1.** Naravno število  $p > 1$  je *praštevilo*, če ima natanko dva pozitivna delitelja:

$$1 \text{ in } p.$$

Naravno število, ki ni praštevilo in ni 1, imenujemo *sestavljeno število*.

Primeri praštevil so

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots,$$

primeri sestavljenih števil pa

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots$$

**Izrek 2.1** (Evklidov izrek). Praštevil je neskončno mnogo.

*Ideja dokaza.* Predpostavimo, da je praštevil končno mnogo:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Obravnavajmo število

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

To število ni deljivo z nobenim od  $p_i$ , kar je v protislovju s predpostavko. Torej je praštevil neskončno mnogo.  $\square$

**Izrek 2.2** (Osnovni izrek aritmetike). Vsako naravno število  $n > 1$  lahko na enoličen način zapišemo kot produkt praštevil:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

*Primer 2.1.* Razstavimo število 126 na praštevila:

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Torej

$$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

## Praštevíla v sodobni kriptografiji

V modernih informacijskih sistemih so praštevíla temelj števílnih šifirnih protokolov. V RSA-kriptosistemu, ki ga uporabljajo spletne banke, brskalniki in tehnologija veriženja blokov, izberemo dve veliki praštevíli  $p$  in  $q$ , izračunamo njihov produkt  $N = pq$  in z njim določimo javni in zasebni ključ. Varnost sistema temelji na dejstvu, da je množenje praštevíl enostavno, razstavljanje velikega števíla na praštevíla pa izjemno zahtevno.

## Iskanje praštevíl

Obstaja več metod za iskanje praštevíl ali preverjanje, ali je dano števílo praštevílo.

- (1) **Eratostenovo sito.** Gre za klasičen algoritem za iskanje praštevíl do danega števíla  $n$ .
  - (a) Zapišemo števíla od 2 do  $n$ .
  - (b) Obkrožimo prvo še neprečrtano števílo (to je praštevílo).
  - (c) Prečrtamo vse njegove večkratnike.
  - (d) Postopek ponavljamo do  $\sqrt{n}$ .
- (2) **Test deljivosti do  $\sqrt{n}$ .** Števílo  $N$  je praštevílo, če ni deljivo z nobenim praštevílom, manjšim ali enakim  $\sqrt{N}$ .
- (3) **Moderne metode.** Za zelo velika števíla, ki jih potrebujemo v kriptografiji, uporabljamo hitre algoritme, kot so:
  - Miller–Rabinov test (verjetnostni),
  - AKS test (determinističen v polinomskem času),
  - ECPP (algoritem na osnovi eliptičnih krivulj).

*Primer 2.2.* Preverimo, ali je 131 praštevílo. Ker  $\sqrt{131} \approx 11.4$ , preverimo deljivost s praštevíli 2, 3, 5, 7, 11. Ker 131 ni deljivo z nobenim od njih, je praštevílo.

### 2.1.4 Matematična indukcija

**Definicija 2.2** (Matematična indukcija). Naj bo  $A(n)$  trditev, ki je smiselna za vsako naravno števílo  $n$ . Trditev  $A(n)$  velja za vsa  $n \in \mathbb{N}$ , če sta izpolnjena naslednja pogoja:

1. (Začetni korak) Trditev velja za prvo naravno števílo:

$$A(1) \text{ je resnična.}$$

2. (Indukcijski korak) Če trditev velja za poljubno naravno števílo  $n$ , potem velja tudi za  $n + 1$ :

$$A(n) \Rightarrow A(n + 1).$$

Takrat pravimo, da velja:

$$A(n) \quad \text{za vse } n \in \mathbb{N}.$$

*Opomba 1.* Aksiom o matematični indukciji zagotavlja, da množica vseh naravnih števil  $n$ , za katere velja  $A(n)$ , ne more biti strogo manjša od  $\mathbb{N}$ .

*Primer 2.3.* Dokazati želimo:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Začetni korak:** Za  $n = 1$  je

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

**Indukcijski korak:** Predpostavimo, da formula velja za  $n$ :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dodamo  $(n+1)$ :

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Kar je ravno formula za  $n+1$ . S tem je dokaz zaključen.

□

*Primer 2.4.* Bernoullijeva neenakost

Bernoullijeva neenakost pravi:

Za vsak  $n \in \mathbb{N}$  in  $x \geq -1$  velja

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Za  $n = 1$  je  $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x$ .

Predpostavimo, da za nek  $n$  velja

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Množimo z  $(1+x) \geq 0$ :

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Ker je  $nx^2 \geq 0$ , sledi:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$

*Primer 2.5.* Formula za geometrijsko vrsto

Dokažimo z indukcijo:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Dokaz poteka povsem enako kot v primeru aritmetične vsote.

### 2.1.5 Močnejša oblika indukcije

Naj bo  $A(n)$  trditev za  $n \in \mathbb{N}$ . Če velja:

1.  $A(1)$  je resnična,
2. iz resničnosti  $A(1), A(2), \dots, A(n)$  sledi tudi resničnost  $A(n + 1)$ ,

potem velja  $A(n)$  za vsa naravna števila.

Pri *običajni matematični indukciji* predpostavimo resničnost trditve  $A(n)$  za nek naravni  $n$  in iz tega sklepamo na resničnost trditve  $A(n + 1)$ . Indukcijski korak ima torej obliko

$$A(n) \Rightarrow A(n + 1).$$

Pri *močnejši (polni) indukciji* pa je indukcijska predpostavka širša: predpostavimo, da trditev velja za *vs*a naravna števila  $1, 2, \dots, n$  in iz tega sklepamo, da velja tudi za  $n + 1$ :

$$A(1), A(2), \dots, A(n) \Rightarrow A(n + 1).$$

Močnejša indukcija je logično ekvivalentna običajni, vendar je v številnih problemih bolj naravna, na primer pri deljivosti, lastnostih zaporedij, rekurzivnih definicijah ali Diofantskih enačbah.

*Primer 2.6.* Dokažimo z močnejšo indukcijo, da lahko vsako naravno število  $n \geq 2$  zapišemo kot produkt praštevil.

**Osnovni korak:** Za  $n = 2$  je trditev očitna, saj je 2 praštevilo.

**Indukcijski korak:** Predpostavimo, da lahko vsa števila  $2, 3, \dots, n$  zapišemo kot produkt praštevil. Naj bo sedaj  $n + 1$  poljubno število večje od 2.

Če je  $n + 1$  praštevilo, je trditev dokazana.

Če pa je sestavljeno, obstajata  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $2 \leq a, b \leq n$ , tako da velja  $n + 1 = ab$ . Po indukcijski predpostavki lahko  $a$  in  $b$  zapišemo kot produkta praštevil, zato je tudi  $n + 1$  produkt praštevil. S tem je dokaz zaključen.

*Primer 2.7 (Stolpi iz Hanoja).* Pri problemu stolpov iz Hanoja imamo tri palice in  $n$  diskov različnih velikosti. Diski so na začetku zloženi na prvi palici po velikosti (največji spodaj). V enem koraku smemo premakniti le en disk, pri čemer večjega diska ne smemo položiti na manjšega.

Trdimo, da je za prenos  $n$  diskov z ene palice na drugo potrebno vsaj

$$2^n - 1$$

premikov.

**Osnovni korak:** Za  $n = 1$  potrebujemo natanko en premik, pri čemer velja

$$2^1 - 1 = 1.$$

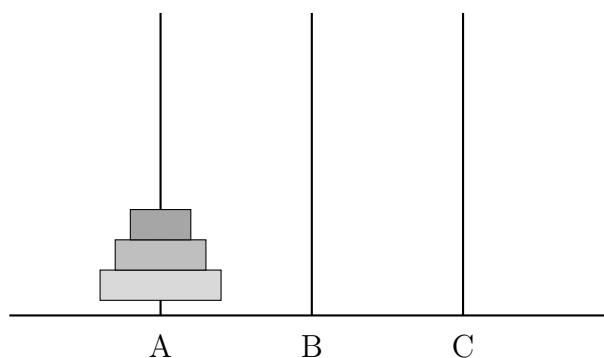
**Indukcijski korak:** Predpostavimo, da za vsak  $k \leq n$  velja, da je za prenos  $k$  diskov potrebnih vsaj  $2^k - 1$  premikov.

Za prenos  $n + 1$  diskov najprej prenesemo zgornjih  $n$  diskov na pomožno palico (vsaj  $2^n - 1$  premikov), nato največji disk premaknemo na ciljno palico (en premik), nato pa še  $n$  diskov prenesemo s pomožne palice na ciljno (vsaj  $2^n - 1$  premikov).

Skupno število premikov je zato vsaj

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1.$$

S tem je trditev dokazana.



Slika 2.1: Začetna postavitve problema stolpov iz Hanoja s tremi diski.

## Naloge

1. Pokažite, da za vsako naravno število  $n$  velja enakost

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pokažite, da za vsako naravno število  $n$  velja

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Dokažite z indukcijo, da za vsako naravno število  $n$  velja

$$2 + 7 + 15 + 26 + \dots + \frac{n(3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}.$$

4. Dokažite, da za vsako naravno število  $n$  velja

$$4 \mid (3^{2n-1} + 1).$$

5. Z matematično indukcijo dokažite:

$$2^n > n \quad \text{za vse } n \geq 1.$$

6. Dokažite z indukcijo:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Naj bo zaporedje definirano z  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ . Dokažite, da velja  $a_n = n^2$ .

8. Dokažite Bernoullijevo neenakost za primer  $x \geq 0$  z uporabo binomskega razvoja.

9. Dokažite, da za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja:

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

10. Dokažite, da je  $7^n - 1$  deljivo s 6 za vse  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.2 Realna števila in absolutna vrednost

Realna števila predstavljajo temeljni številski sistem matematične analize. Z njimi opišemo dolžine, razdalje, meritve, fizikalne količine in vse pojave, ki jih razumemo kot zvezne. Množico realnih števil označimo z  $\mathbb{R}$ . Njena algebraična in urejenostna struktura izhaja iz sistema aksiomov, ki jo povsem določi.

V tem razdelku predstavimo osnovne pojme: intervale na realni osi, urejenost, supremum in infimum ter absolutno vrednost, ki predstavlja merilo razdalje na  $\mathbb{R}$ .

### 2.2.1 Intervali in urejenost realnih števil

Relaciji  $<$  in  $\leq$  določata linearno urejenost realnih števil. Za vsak par realnih števil  $a, b$  velja natanko ena od možnosti

$$a < b, \quad a = b, \quad \text{ali} \quad a > b,$$

kar je posledica aksioma trihotomije.

Na številskem intervalu opisujemo podmnožice realnih števil. Uporabljamo naslednje oznake:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}, \\ [a, b), (a, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b]. \end{aligned}$$

*Primer 2.8.* Poiščimo množico vseh  $x \in \mathbb{R}$ , ki zadoščajo neenačbi

$$|x - 2| < 3.$$

Absolutna vrednost opisuje razdaljo do števila 2. Zato je rešitev

$$-1 < x < 5,$$

torej interval  $(-1, 5)$ .

### 2.2.2 Omejenost množic, supremum in infimum

Naj bo  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Če obstaja realno število  $M$  tako, da

$$x \leq M \quad \text{za vse } x \in A,$$

pravimo, da je  $M$  *zgornja meja* množice  $A$ .

Analogno je  $m$  *spodnja meja*, če

$$m \leq x \quad \text{za vse } x \in A.$$

Izmed vseh zgornjih mej je najpomembnejša najmanjša.

**Definicija 2.3.** Najmanjša zgornja meja množice  $A$  je njen *supremum*,

$$\sup A = M',$$

če velja:

1.  $x \leq M'$  za vse  $x \in A$ ,
2. če je  $M^*$  katerakoli zgornja meja množice  $A$ , potem  $M' \leq M^*$ .

Popolnoma analogno definiramo infimum.

*Primer 2.9.* Naj bo  $A = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ . Tedaj je

$$\sup A = 1, \quad \inf A = 0.$$

Supremum je hkrati maksimum, ker  $1 \in A$ , infimum pa ni minimum, saj  $0 \notin A$ .

### 2.2.3 Dedekindov aksiom (aksiom o polnosti)

Realna števila se od racionalnih ločijo po t. i. *aksiomu o polnosti*, ki ga je prvi jasno formuliral Richard Dedekind (1831–1916):

**Izrek 2.3** (Dedekindov aksiom o polnosti). Vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil ima svojo najmanjšo zgornjo mejo (supremum).

*Opomba 2.* V  $\mathbb{Q}$  supremum v splošnem ne obstaja: množica  $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2, x > 0\}$  nima supremuma v  $\mathbb{Q}$ , v  $\mathbb{R}$  pa je  $\sup = \sqrt{2}$ .

### 2.2.4 Absolutna vrednost realnega števila

Absolutna vrednost je osnovna funkcija, ki na realni osi meri razdaljo.

**Definicija 2.4.** Absolutna vrednost realnega števila  $x$  je število

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Geometrijsko je  $|x|$  razdalja od  $x$  do 0, izraz  $|a - b|$  pa je razdalja med  $a$  in  $b$ .

Za absolutno vrednost veljajo osnovne lastnosti:

1.  $|x| \geq 0$  in  $|x| = 0$  natanko tedaj, ko je  $x = 0$ ;
2.  $|xy| = |x||y|$ ;
3.  $|x - y| = |y - x|$  (razdalja med točkama  $x$  in  $y$ );
4.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (trikotniška neenakost);
5.  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ .

*Primer 2.10.* Rešimo neenačbo

$$1 < |x + 1| \leq 2.$$

Zapišemo jo kot unijo intervalov in dobimo rešitev

$$(-3, -2] \cup [0, 1)$$

## 2.2.5 Epsilon-okolica

V analizi bomo pogosto uporabljali okolice točk.

**Definicija 2.5.** Za  $a \in \mathbb{R}$  in  $\varepsilon > 0$  je  $\varepsilon$ -okolica števila  $a$  množica

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\}.$$

Gre za odprti interval dolžine  $2\varepsilon$  s središčem v  $a$ :

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

## Naloge

1. Izračunajte:

$$-2 + |4(-2) + 3| - |((-3) - |-1|)|.$$

2. Izračunajte in opišite množico vseh  $x \in \mathbb{R}$ , ki zadoščajo  $|x - 3| \geq 5$ .
3. Določite množico realnih števil, ki zadošča pogoju:

$$x - 2|x| = |x + 5| - 12.$$

4. Rešite neenačbo z absolutno vrednostjo:

$$|3x - 7| + 2 \leq 5.$$

5. Določite množico realnih števil, ki zadošča pogoju:

$$|x + 4| > |2x - 1|.$$

6. Izračunajte in poenostavite izraz:

$$|x - 3| \cdot |x + 2| \quad \text{za } x = -5, -1, 0, 4.$$

7. Določite množico realnih števil, ki zadošča pogoju:

$$|x^2 - x| - x \leq 1.$$

8. Dokažite, da za poljubna realna števila  $a, b$  velja

$$|a - b| \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

9. Naj bo  $A = \{(-1)^n + 1/n; n \in \mathbb{N}\}$ . Poiščite  $\sup A$  in  $\inf A$ .

10. Narišite  $\varepsilon$ -okolico števila  $a = 1$  za  $\varepsilon = 0.3$ .

## 2.3 Kompleksna števila

### Uvod

Kompleksna števila predstavljajo naravno razširitev realnih števil. Njihov razvoj je tesno povezan z reševanjem algebraičnih enačb. Že v 16. stoletju sta italijanska matematika Niccolo Fontana Tartaglia in Girolamo Cardano pri raziskovanju enačb 3. stopnje naletela na izraze oblike  $\sqrt{-1}$ , ki so jih tedaj imenovali *imaginarnost*. Šele v 18. stoletju je Euler uvedel zapis  $i$ , Gauss pa je številom oblike  $a + bi$  dal jasen geometrijski pomen in dokončno utemeljil sistem kompleksnih števil kot urejeno algebrsko strukturo.

Kompleksna števila danes uporabljamo v analizi, teoriji signalov, diferencialnih enačbah, kvantni mehaniki, elektrotehniki in drugih naravoslovnih področjih. V nadaljevanju bomo spoznali njihove osnovne lastnosti, geometrijski pomen in računanje.

### 2.3.1 Definicija in osnovne operacije

**Definicija 2.6.** Kompleksno število je urejeni par realnih števil  $(a, b)$ , ki ga zapisujemo v obliki

$$z = a + bi,$$

kjer je  $i$  imaginarna enota z lastnostjo  $i^2 = -1$ . Število  $a$  je *realni del* kompleksnega števila  $z$  (tudi  $\operatorname{Re}(z)$ ), število  $b$  pa *imaginarni del* (tudi  $\operatorname{Im}(z)$ ).

Realna števila identificiramo s pari  $(a, 0)$ , zato velja

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

### 2.3.2 Seštevanje in množenje kompleksnih števil

Naj bodo  $z, w, u$  poljubna kompleksna števila. Za operacijo seštevanja veljajo naslednje lastnosti, enake kot pri realnih številih.

1. **Asociativnost seštevanja:**

$$(z + w) + u = z + (w + u).$$

2. **Komutativnost seštevanja:**

$$z + w = w + z.$$

3. **Nevtralni element (enota) za seštevanje:**

$$z + (0 + i \cdot 0) = (0 + i \cdot 0) + z = z.$$

Kompleksno število  $0 = 0 + i \cdot 0$  je torej nota za seštevanje.

4. **Nasprotni element:** Za vsako kompleksno število  $z = a + ib$  obstaja nasprotno število

$$-z = -a - ib,$$

za katerega velja

$$z + (-z) = 0 + i \cdot 0.$$

Množica kompleksnih števil je tako za operacijo seštevanja *komutativna grupa*.

Podobno kot pri realnih številih imajo tudi kompleksna števila dobro urejeno algebraično strukturo. Naj bodo  $z, w, u$  poljubna kompleksna števila. Poleg lastnosti seštevanja, ki smo jih že navedli, za množenje veljajo naslednje zakonitosti:

1. **Asociativnost množenja:**

$$(zw)u = z(wu).$$

2. **Komutativnost množenja:**

$$zw = wz.$$

3. **Nevtralni element (enota) za množenje:**

$$z \cdot (1 + i \cdot 0) = (1 + i \cdot 0) \cdot z = z.$$

Kompleksno število  $1 = 1 + i \cdot 0$  je torej enota za množenje.

4. **Obratni (inverzni) element:** Za  $z = a + ib$ , kjer ni hkrati  $a = 0$  in  $b = 0$ , obstaja obratni element

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

za katerega velja

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1 + i \cdot 0.$$

Torej je množica kompleksnih števil brez 0 za množenje komutativna grupa.

Seštevanje in množenje kompleksnih števil povezuje tudi lastnost, ki je ključna za obseg  $\mathbb{C}$ :

### 1. Distributivnost množenja glede na seštevanje:

$$z(w + u) = zw + zu.$$

Zaradi lastnosti (i)–(ix) je množica kompleksnih števil  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  obseg (kolobar z enoto), saj je:

- $(\mathbb{C}, +)$  komutativna grupa,
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  komutativna grupa,
- množenje je distributivno glede na seštevanje.

### 2.3.3 Odštevanje in deljenje kompleksnih števil

Odštevanje in deljenje sta v množici kompleksnih števil definirana z enakimi pravili kot v realnem obsegu, s tem da pri deljenju uporabimo obratno element:

$$(a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - id) = (a - c) + i(b - d).$$

$$(a+ib) : (c+id) = (a+ib)(c+id)^{-1} = (a+ib) \left( \frac{c}{c^2 + d^2} - i \frac{d}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

*Primer 2.11.* Naj bo  $z_1 = 3 - 2i$  in  $z_2 = -1 + 4i$ . Tedaj je

$$z_1 + z_2 = 2 + 2i, \quad z_1 z_2 = (3)(-1) - (-2)(4) + (3)(4)i + (-2)(-1)i = 5 + 10i.$$

### 2.3.4 Konjugirano kompleksno število

**Definicija 2.7.** Konjugirano kompleksno število k  $z = a + bi$  je

$$\bar{z} = a - bi.$$

Veljajo naslednje lastnosti:

$$z + \bar{z} = 2a, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2, \quad \overline{z\bar{w}} = \bar{z}w.$$

Konjugirano število ima pomembno vlogo pri deljenju kompleksnih števil. Z njegovo pomočjo lahko obratno vrednost kompleksnega števila izračunamo na preprost način. Naj bo  $z \neq 0$ . Tedaj velja:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

To pomeni, da dobimo obratno število tako, da konjugirano število delimo z kvadratom absolutne vrednosti.

S tem se lahko deljenje dveh kompleksnih števil  $z$  in  $w$  zapiše kot:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = z \cdot \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Ta zapis je posebej uporaben v praksi, saj se izognemo neposrednemu računanju z ulomki, v katerih nastopa imaginarna enota  $i$ .

### 2.3.5 Absolutna vrednost kompleksnega števila

Absolutna vrednost kompleksnega števila je enaka dolžini vektorja od izhodišča do točke, ki predstavlja to število v kompleksni ravnini:

**Definicija 2.8.** Za  $z = a + bi$  definiramo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Za absolutno vrednost veljajo trikotniške neenakosti:

$$|zw| = |z| |w|, \quad ||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|.$$

### 2.3.6 Grafična predstavitev kompleksnega števila

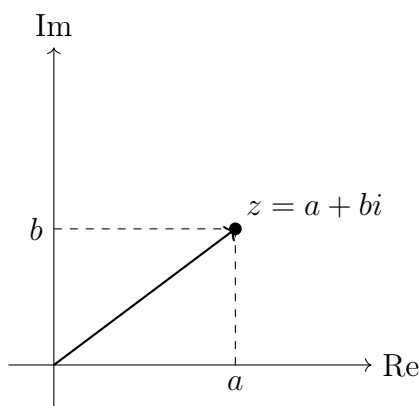
Kompleksno število  $z = a + bi$  predstavimo kot točko  $(a, b)$  v ravnini - to je *kompleksna ravnina*. Kompleksna ravnina se pogosto imenuje tudi *Argandova ravnina*, po francoskem matematiku Jeanu-Robertu Argandu (1768–1822). Argand je prvi sistematično predstavil geometrijsko interpretacijo kompleksnih števil kot točk v ravnini, pri čemer je realni del števila predstavil na vodoravni osi, imaginarni del pa na navpični. Ta prikaz je omogočil intuitivno razumevanje absolutne vrednosti, argumenta in rotacij, zato se uporablja še danes.

Absolutna vrednost  $|z|$  je dolžina vektorja od izhodišča do točke  $(a, b)$ .

### 2.3.7 Argument in polarni zapis kompleksnega števila

**Definicija 2.9.** *Argument* kompleksnega števila  $z = a + bi$  je kot  $\varphi$ , za katerega velja

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$



Slika 2.2: Grafična predstavitev kompleksnega števila v Argandovi ravnini.

**Izrek 2.4** (Polarni zapis). Za  $z = a + bi$  in  $\varphi = \arg(z)$  velja

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

S pomočjo Eulerjeve identitete dobimo elegantno obliko:

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

*Primer 2.12.* Naj bo  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ . Tedaj je

$$|z| = 4, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Torej

$$z = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 4e^{2\pi i/3}.$$

### 2.3.8 Množenje kompleksnih števil v polarnem zapisu

Računanje s kompleksnimi števili je pogosto bistveno enostavnejše, kadar so zapisana v polarnem zapisu. Naj bosta zato

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

**Izrek 2.5.** Naj bosta  $z_1$  in  $z_2$  kompleksni števili v polarnem zapisu. Tedaj velja

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

*Dokaz.* Začnemo z običajnim množenjem:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)). \end{aligned}$$

Z uporabo adicijskih formul za sinus in kosinus dobimo

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

□

*Opomba 3.* Pri računu smo uporabili trigonometrični adicijski formuli

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Zdaj lahko rezultat posplošimo še na produkt več kompleksnih števil.

**Izrek 2.6.** Naj bo

$$z_k = r_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tedaj velja

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \left( \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) \right).$$

*Dokaz.* Dokaz naredimo z indukcijo po  $n$ . Za  $n = 2$  je izrek že dokazan. Predpostavimo, da velja za  $n - 1$  členov. Če označimo

$$\alpha = \varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-1},$$

dobimo za produkt vseh do  $n$ :

$$\begin{aligned} (z_1 \cdots z_{n-1})z_n &= r_1 \cdots r_{n-1} (\cos \alpha + i \sin \alpha) r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) \\ &= r_1 \cdots r_n (\cos \alpha \cos \varphi_n - \sin \alpha \sin \varphi_n \\ &\quad + i(\sin \alpha \cos \varphi_n + \cos \alpha \sin \varphi_n)) \\ &= r_1 \cdots r_n (\cos(\alpha + \varphi_n) + i \sin(\alpha + \varphi_n)), \end{aligned}$$

kjer smo ponovno uporabili adicijski formuli. Ker je  $\alpha + \varphi_n = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n$ , je indukcijski korak zaključen.  $\square$

### 2.3.9 Potenciranje kompleksnih števil

Potenciranje kompleksnih števil v polarnem zapisu sledi neposredno iz izreka 2.4. o produktu več kompleksnih števil. Prehod vodi k pomembni formuli, ki jo je v 18. stoletju populariziral Abraham de Moivre.

**Posledica 2.1** (Moivreova formula). Naj bo  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Tedaj za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

*Dokaz.* V izreku o produktu več kompleksnih števil uporabimo, da se v produktu

$$z \cdot z \cdot \dots \cdot z$$

pojavi  $n$ -krat isti faktor, torej

$$z^n = r^n (\cos(\varphi + \cdots + \varphi) + i \sin(\varphi + \cdots + \varphi)) = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

$\square$

*Opomba 4.* Moivreovo identiteto je formaliziral Abraham de Moivre (1667–1754), francosko-angleški matematik, ki je med prvimi sistematično proučeval kompleksne potence in trigonometriške identitete. Njegovo delo je bistveno prispevalo k poznejšemu razumevanju Eulerjeve formule in kompleksne analize.

**Za vajo:** Dokažite Moivreovo formulo z matematično indukcijo, brez sklicevanja na izrek o produktu več kompleksnih števil.

*Primer 2.13.* Izračunajmo  $z^6$ , kjer je  $z = -1 + i$ .

Najprej določimo polmer in argument:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \tan \varphi = \frac{1}{-1} = -1.$$

Ker je  $z$  v *II. kvadrantu*, je argument

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Uporabimo Moivreovo formulo:

$$z^6 = (\sqrt{2})^6 \left( \cos\left(6 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(6 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \right).$$

Poenostavimo:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})^6 &= 2^3 = 8, \\ 6 \cdot \frac{3\pi}{4} &= \frac{18\pi}{4} = \frac{9\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zaradi periodičnosti:

$$\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Torej:

$$z^6 = 8(0 + i) = 8i.$$

*Opomba 5.* Zanimivo je, da število  $(-1 + i)$  pri potenciranju »kroži« okoli izhodišča, polmer se potencira, argument pa rotira za  $3\pi/4$  ob vsakem koraku. Moivreova formula tako neposredno pokaže povezavo med potenciranjem in rotacijo v kompleksni ravnini.

### 2.3.10 Deljenje kompleksnih števil v polarnem zapisu

Tudi za deljenje kompleksnih števil je polarni zapis izjemno praktičen, saj se računanje argumentov in absolutnih vrednosti neposredno prenese na aritmetiko kotov in dolžin.

**Izrek 2.7.** Naj bo  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  neneničelno kompleksno število. Tedaj je njegova obratna vrednost

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

*Dokaz.* Za  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  je

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

□

**Izrek 2.8.** Naj bosta

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_2 \neq 0.$$

Tedaj je njun kvocient

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

*Dokaz.* Uporabimo obratno vrednost iz prejšnje trditve:

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \frac{1}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)}.$$

Množenje v polarnem zapisu da

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

□

### 2.3.11 Korenjenje kompleksnih števil

Zanima nas rešitev enačbe

$$u^n = z, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ta problem se neposredno prevede na iskanje  $n$ -tih korenov kompleksnega števila v polarnem zapisu.

Naj bo

$$z = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0), \quad r_0 \geq 0, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi).$$

Nato iščemo števila oblike

$$u_k = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Dokaz.* Če vzamemo

$$u = \sqrt[n]{r_0} \left( \cos \left( \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

potem je po Moivreovi formuli

$$u^n = r_0(\cos(\varphi_0 + 2k\pi) + i \sin(\varphi_0 + 2k\pi)) = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0) = z.$$

□

Primer 2.14. Poiščimo rešitve enačbe

$$u^4 = -16.$$

Najprej zapišemo število v polarnem zapisu. Ker je

$$-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi),$$

imamo  $r_0 = 16$  in  $\varphi_0 = \pi$ .

Korenjenje da

$$u_k = \sqrt[4]{16} \left( \cos \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ker je  $\sqrt[4]{16} = 2$ , dobimo:

$$u_k = 2 \left( \cos \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) \right).$$

Izračunamo vse štiri korene:

$$u_0 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$u_1 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$u_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

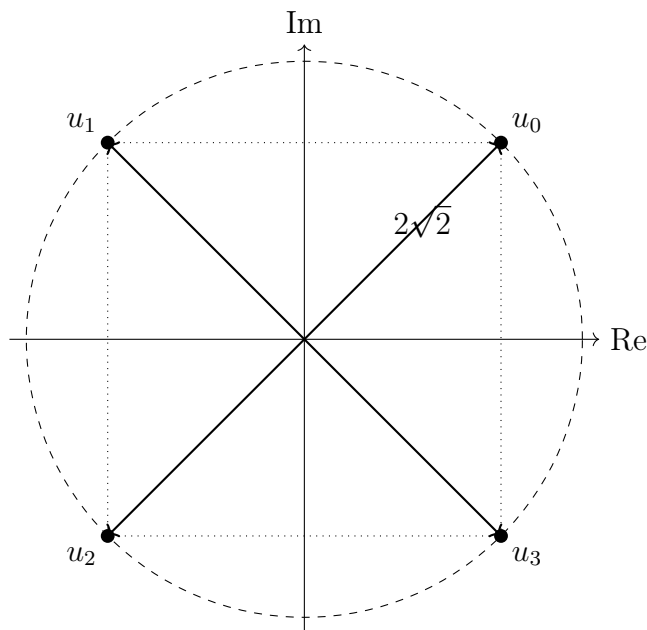
$$u_3 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

*Opomba 6.* Štirje koreni so oglišča pravilnega štirikotnika središčnega v izhodišču, kar je značilen geometrijski pojav pri enačbah oblike  $z^n = a$ .

## 2.4 Številске množice v ekonomiji

Matematika je temeljni jezik, s katerim ekonomija opisuje, meri in napoveduje vedne gospodarskih subjektov ter dinamiko ekonomskih procesov. Številске množice - od naravnih do kompleksnih števil - tvorijo osnovno ogrodje, ki tvori temelje kvantitativnih ekonomskih analiz. Z naravnimi števili štejemo enote proizvodnega procesa ali populacije, s celimi števili opisujemo dobičke in izgube, z racionalnimi in realnimi števili pa modeliramo cene, količine, tržne funkcije, indeksna števila, obrestne mere in diskontne tokove. V naprednejših pristopih se pojavljajo celo kompleksna števila, predvsem v ekonometriji in analizi časovnih vrst.

V nadaljevanju predstavimo nekaj tipičnih primerov uporabe številskih množic v ekonomiji.



Slika 2.3: Rešitve enačbe  $u^4 = -16$  v kompleksni ravnini.

## Realna števila v modelih povpraševanja in ponudbe

Realna števila omogočajo opisovanje zveznih odvisnosti, kot so funkcije povpraševanja, ponudbe ali proizvodnje. Primer preproste funkcije povpraševanja je

$$Q_d(p) = 100 - 2p,$$

kjer sta tako cena  $p$  kot količina  $Q_d$  realni spremenljivki. Domeno in zalogo vrednosti takšnih funkcij tvorijo podmnožice realnih števil, kar omogoča analizo zveznih sprememb cen in količin.

Prav tako realna števila predstavljajo osnovo za opis proračunske ravnotežnosti potrošnika. Proračunska premica v dveh dobrinah je dana z enačbo

$$p_x x + p_y y = m,$$

kjer  $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  opisujeta potrošni količini,  $p_x, p_y \in \mathbb{R}_{> 0}$  ceni,  $m \in \mathbb{R}_{> 0}$  pa dohodek potrošnika.

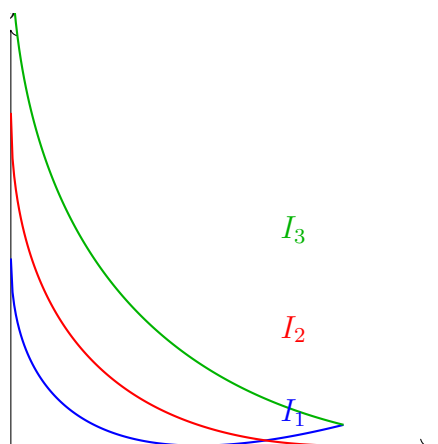
## Indiferenčne krivulje in njihova matematična interpretacija

Indiferenčne krivulje so množice vseh kombinacij potrošniških dobrin, ki dajejo enako stopnjo zadovoljstva. Naj bo na primer funkcija uporabnosti

$$U(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Indiferenčna krivulja za dano raven  $k$  je množica

$$I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2; \sqrt{x} + \sqrt{y} = k\}.$$

Indiferenčne krivulje  $U(x, y) = k$ 

Slika 2.4: Indiferenčne krivulje kot podmnožice realne ravnine.

## Realna števila in indeksi cen

V ekonomski statistiki imajo ključno vlogo *indeksna števila*, ki opisujejo spremembe cen, stroškov ali količin skozi čas. Najbolj klasičen primer je Laspeyresov indeks cen:

$$I_L = \frac{\sum_i p_i^t q_i^0}{\sum_i p_i^0 q_i^0},$$

kjer so  $p_i^t$  cene v tekočem obdobju,  $p_i^0$  cene v osnovnem obdobju,  $q_i^0$  pa količine iz osnovnega obdobja.

Paashev indeks cen temelji na uporabi količin iz tekočega obdobja. Pri tem indeksu so teže prilagojene trenutni strukturi potrošnje, zato bolje odraža dejansko košarico dobrin v obdobju merjenja. Definiramo ga kot

$$I_P = \frac{\sum_i p_i^1 q_i^1}{\sum_i p_i^0 q_i^1},$$

kjer je  $p_i^0$  cena dobrine  $i$  v osnovnem obdobju,  $p_i^1$  cena v tekočem obdobju,  $q_i^1$  pa količina dobrine  $i$  v tekočem obdobju.

Paashev indeks tako primerja stroške nakupa *isto velike* košarice iz tekočega obdobja, obračunane po cenah obeh obdobj. Za razliko od Laspeyresovega indeksa, ki uporablja količine iz osnovnega obdobja, Paashev indeks običajno podcenjuje inflacijo, saj upošteva prilagoditve potrošnikov na spremembe cen (t. i. substitucijski učinek).

Oba indeksa sta realna števila, ki opisujeta relativno spremembo cen. Indekse cen obravnavamo kot pozitivna realna števila, običajno normirana tako, da je osnovno obdobje enako 100.

## Realna števila v finančni matematiki

Finančna matematika temelji na operacijah nad realnimi števili. Pri diskontiranju, obrestnem računu ali vrednotenju projektov se pojavljajo izrazi, kot je

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n},$$

kjer je  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  obrestna mera, izražena v odstotkih (%),  $n \in \mathbb{N}$  število obdobj,  $PV, FV \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  pa sedanja in prihodnja vrednost investicije.

## Naloge

1. Izračunajte:

$$(3 - 2i) + (4 + 5i), \quad (1 - 3i) - (2 + i).$$

2. Izračunajte produkt in uporabite konjugiranje:

$$(2 + i)(3 - 4i), \quad z\bar{z} \text{ za } z = -5 + 12i.$$

3. Naj bo  $z = a + bi$  kompleksno število, kjer sta  $a$  in  $b$  realni števili. Določite realni in imaginarni del kompleksnega števila

$$w = \bar{z} - iz^2.$$

4. Izračunajte absolutno vrednost in argument kompleksnega števila:

$$z = -3 + 3\sqrt{3}i.$$

5. Zapišite v polarnem zapisu kompleksno število

$$z = 5\sqrt{3} + 5i.$$

6. Zapišite v kartezičnem zapisu kompleksno število

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

7. Poenostavite izraz in nato izračunajte še absolutno vrednost:

$$(1 + 2i)^2 + \frac{25}{3 + 4i} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i^{207}.$$

8. Rešite enačbo:

$$z^5 = i.$$

9. Rešite enačbo v kompleksnih številih:

$$z^4 + 16 = 0.$$

10. Poiščite vsa kompleksna števila  $z$ , ki zadoščajo:

$$|z - (1 + i)| = |z + (1 - i)|.$$

(Namig: gre za premico v kompleksni ravnini.)

11. V obsegu kompleksnih števil poiščite rešitve enačbe

$$z^2 - 6z + 25 = 0.$$

12. Za naslednja kompleksna števila  $z$  poiščite  $Re(z)$ ,  $Im(z)$ ,  $\bar{z}$  in  $|z|$ :

(a)  $z = -1 + 4i$ ;

(b)  $z = \frac{3 - 5i}{2 + i} - \frac{4 - i}{1 - 2i}$ .

13. Narišite množico točk v kompleksni ravnini, ki zadoščajo danemu pogoju:

(a)  $Re(z) \leq 0$ ;

(b)  $|z| > 2$ ;

(c)  $|z + 1| \geq 3$ ;

(d)  $|z - (2 - i)| < 2$ ;

(e)  $z \cdot \bar{z} = 9$ ;

(f)  $|z - 1| = |z + 1|$ ;

(g)  $Im(z^2) \geq 0$ .

14. V polarnem zapisu zapišite naslednja kompleksna števila:

(a)  $z = -2 - i$ ;

(b)  $z = 3i$ ;

(c)  $z = \frac{3(2 - i)}{1 + \sqrt{3}i}$ .



# Poglavje 3

## Realne funkcije

### Uvod

Razvoj pojma funkcije je eden izmed ključnih mejnikov v zgodovini matematike. Če je bila v antični Grčiji funkcija razumljena predvsem kot geometrijska zveza med količinami, se je v 17. stoletju z razvojem analize pri Issacu Newtonu (1643-1727) in Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu (1646-1716) pojavila potreba po bolj formalnem opisu razmerja med spremenljivkami. V 18. stoletju je Euler uvedel sodobno notacijo  $f(x)$ , kar je pomenilo pomemben premik: funkcija ni bila več le krivulja v ravnini, temveč splošni predpis, ki vsakemu številu priredi drugo število.

V 19. stoletju sta Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) in Augustin Louis Cauchy (1789-1857) pojmu funkcije dodala formalno strogost - funkcija je lahko poljubna preslikava med množicama realnih števil, dokler je natančno določena. Ta moderni pristop tvori temelje današnje matematične analize.

V tem poglavju bomo obravnavali splošni pojem preslikave, pregled elementarnih funkcij ter limito in zveznost funkcije kot temeljna pojma diferencialnega in integralnega računa.

### 3.1 Preslikave

**Definicija 3.1.** Naj bosta  $A$  in  $B$  množici. *Preslikava* oziroma *funkcija*  $f : A \rightarrow B$  je predpis, ki vsakemu elementu  $a \in A$  priredi natanko en element  $b \in B$ , ki ga imenujemo *slika elementa*  $a$  in ga označimo  $f(a) = b$ .

Množico  $A$  imenujemo *domena* ali *definijsko območje*, množico

$$Z_f = \{f(a); a \in A\} \subseteq B$$

pa *zaloga vrednosti* preslikave  $f$ .

**Definicija 3.2.** Preslikava  $f : A \rightarrow B$  je

- *injektivna*, če iz  $a_1 \neq a_2$  sledi  $f(a_1) \neq f(a_2)$ ;

- *surjektivna*, če za vsak  $b \in B$  obstaja  $a \in A$  s  $f(a) = b$ ;
- *bijektivna*, če je hkrati injektivna in surjektivna.

Če je funkcija  $f$  bijektivna, obstaja *inverzna preslikava*  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

### 3.1.1 Kompozitum preslikav in njegova lastnost

**Definicija 3.3.** Naj bosta  $f : A \rightarrow B$  in  $g : B \rightarrow C$ . *Kompozitum* je preslikava  $g \circ f : A \rightarrow C$ , definirana s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Najprej opozorimo na pomembno dejstvo: pri preslikavah kompozitum praviloma ni komutativen. To pomeni, da v splošnem velja

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Razlog je preprost - redosled izvajanja preslikav vpliva na rezultat, saj najprej uporabimo eno preslikavo, nato pa še drugo.

Po drugi strani pa kompozitum je asociativen. Naj bodo podane preslikave  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  in  $h : C \rightarrow D$ . Tedaj za vsak  $x \in A$  velja

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))),$$

in prav tako

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))).$$

Tako dobimo

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

kar pomeni, da vrstni red oklepajev pri kompozitumu ne vpliva na končni rezultat.

*Primer 3.1.*

1. Preslikava  $f(x) = x^2$  iz  $\mathbb{R}$  v  $\mathbb{R}$  ni injektivna in ni surjektivna, je pa bijektivna na domeni  $[0, \infty)$ .
2. Preslikava  $g(x) = x + 3$  je bijektivna.
3. Kompozitum  $(g \circ f)(x) = x^2 + 3$ .

**Definicija 3.4** (Graf preslikave). Naj bo  $f : A \rightarrow B$ . *Graf preslikave*  $f$ , označimo ga z  $\Gamma_f$ , je množica vseh urejenih parov  $(a, f(a))$ :

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B.$$

*Primer 3.2.* Naj bo  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{p, q, r\}$  in naj bo preslikava  $f : A \rightarrow B$  definirana kot

$$f(2) = q, \quad f(4) = p, \quad f(6) = r.$$

Poiščimo graf preslikave  $f$ .

Graf preslikave  $f$  je

$$\Gamma_f = \{(2, q), (4, p), (6, r)\}.$$

*Primer 3.3.* Naj bo dana preslikava  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , podana s predpisom

$$g(x) = |x| + 1.$$

Graf preslikave  $g$  je

$$\Gamma_g = \{(x, |x| + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

### 3.1.2 Sodost, lihost, monotonost in omejenost funkcij

**Definicija 3.5** (Soda funkcija). Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pravimo, da je funkcija *soda*, če za vsak  $x \in D$  velja

$$f(-x) = f(x),$$

pri čemer mora biti  $x \in D \Rightarrow -x \in D$  (domena mora biti simetrična glede na 0).

**Definicija 3.6** (Liha funkcija). Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pravimo, da je funkcija *liha*, če za vsak  $x \in D$  velja

$$f(-x) = -f(x),$$

pri čemer mora veljati  $x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

*Primer 3.4.*

1. Funkcija  $f(x) = x^2$  je soda, saj  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .
2. Funkcija  $g(x) = x^3$  je liha, saj  $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ .
3. Funkcija  $h(x) = x^2 + 1$  ni ne soda ne liha, ker  $h(-x) = x^2 + 1 \neq -(x^2 + 1)$ .

**Definicija 3.7** (Monotonost). Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pravimo, da je funkcija

- *naraščajoča* na  $D$ , če za vsak  $x_1 < x_2$  iz  $D$  velja  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- *strogo naraščajoča*, če velja  $f(x_1) < f(x_2)$ ;
- *padajoča* na  $D$ , če za vsak  $x_1 < x_2$  velja  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- *strogo padajoča*, če velja  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Primer 3.5.

1. Eksponentna funkcija  $f(x) = e^x$  je strogo naraščajoča na  $\mathbb{R}$ .
2. Funkcija  $g(x) = -x$  je strogo padajoča.
3. Funkcija  $h(x) = x^2$  ni monotona na  $\mathbb{R}$ , je pa strogo naraščajoča na  $[0, \infty)$  in strogo padajoča na  $(-\infty, 0]$ .

**Definicija 3.8** (Omejenost). Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcija  $f$  je

- *navzgor omejena*, če obstaja realno število  $M$  tako, da za vse  $x \in D$  velja

$$f(x) \leq M;$$

- *navzdol omejena*, če obstaja realno število  $m$  tako, da za vse  $x \in D$  velja

$$f(x) \geq m;$$

- *omejena*, če obstajata  $m, M \in \mathbb{R}$  s

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{za vse } x \in D.$$

Primer 3.6.

1. Funkcija  $f(x) = \sin x$  je omejena, saj velja  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .
2. Funkcija  $g(x) = x^2$  je navzdol omejena ( $g(x) \geq 0$ ) in ni navzgor omejena.
3. Funkcija  $h(x) = \frac{1}{x}$  ni omejena na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Naloge

1. Naj bo dana preslikava  $f : A \rightarrow B$ , kjer je  $A = \{1, 2, 3\}$  in  $B = \{a, b, c\}$ , definirana s  $f(1) = b$ ,  $f(2) = c$ ,  $f(3) = a$ . Zapiši graf preslikave in določi njeno zalogo vrednosti.
2. Dana je preslikava  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 4$ . Določi, ali je preslikava injektivna in ali je surjektivna.
3. Naj bo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 4$ . Poišči množico  $A \subseteq \mathbb{R}$ , na kateri je  $g$  bijektivna.
4. Dana je preslikava  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |x|$ . Ali je preslikava injektivna? Utemelji.
5. Naj bosta  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , in  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 2$ . Izračunaj kompozitume  $f \circ g$ ,  $g \circ f$  in  $f \circ f$ .
6. Naj bo  $f(x) = 2x - 3$  in  $g(x) = \sqrt{x}$ . Določi definicijsko območje kompozituma  $g \circ f$ .

7. Dana sta  $f(x) = \sin x$  in  $g(x) = x^2$ . Izračunaj  $(f \circ g)(x)$  in  $(g \circ f)(x)$ .
8. Naj bo  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = e^x$ . Določi  $f \circ g$  in  $g \circ f$  ter njuni definicijski območji.
9. Določi, ali je funkcija  $f(x) = x^5 - 3x$  soda, liha ali nič od tega.
10. Razvrsti naslednje funkcije glede na sodost ali lihost:

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^3 - x, \quad f_3(x) = \cos x, \quad f_4(x) = e^x.$$

11. Naj bo  $f(x) = |x|$ . Ugotovi, ali je funkcija soda, liha ali nič od tega.
12. Razvrsti naslednje funkcije glede na monotonost na  $\mathbb{R}$ :

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2.$$

13. Določi intervale monotonosti funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x.$$

14. Naj bo  $f(x) = \sqrt{x}$ . Ali je funkcija naraščajoča? Utemelji.

15. Preuči monotonost funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

na intervalih  $(-\infty, 0)$  in  $(0, \infty)$ .

16. Naj bo  $f(x) = x^2 - 2$  in  $g(x) = \sqrt{x+2}$ . Določi, ali velja  $(g \circ f)(x) = |x|$ . Preveri za več vrednosti  $x$  in utemelji odgovor.

## 3.2 Elementarne funkcije

Elementarne funkcije so osnovni gradniki matematične analize. Mednje sodijo algebrske, potenčne, eksponentne, logaritemske in trigonometrične funkcije ter različne funkcije, sestavljene iz njih.

### 3.2.1 Linearna, kvadratna in polinomska funkcija

Elementarne funkcije pogosto začnemo graditi z najosnovnejšimi preslikavami, pri katerih lahko z algebrskimi metodami hitro opazimo lastnosti, kot so zveznost, monotonost, ničle, ekstreme in obrnljivost. Med takšne spadajo linearne, kvadratne in na splošno polinomske funkcije.

**Definicija 3.9** (Linearna funkcija). Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oblike

$$f(x) = kx + n,$$

kjer sta  $k, n \in \mathbb{R}$ , se imenuje *linearna funkcija*. Parameter  $k$  imenujemo *smerni koeficient* ali *naklon*, parameter  $n$  pa *začetna vrednost*.

Linearne funkcije so povsod definirane. Če je  $k > 0$ , je funkcija strogo naraščajoča; če je  $k < 0$ , je strogo padajoča. Če je  $k = 0$ , gre za konstantno funkcijo. Graf linearne funkcije je premica.

*Primer 3.7.*

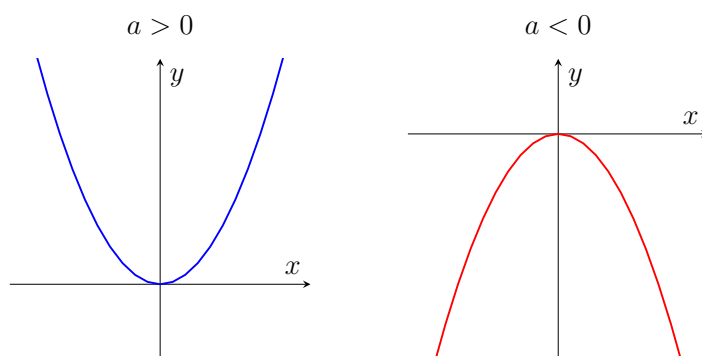
1. Funkcija  $f(x) = 2x - 1$  je strogo naraščajoča,  $k = 2$ . Začetna vrednost je  $-1$ . Njena ničla je  $x = \frac{1}{2}$ .
2. Funkcija  $g(x) = -3x + 4$  je strogo padajoča,  $k = -3$ . Začetna vrednost je  $4$ .
3. Funkcija  $h(x) = 5$  je konstantna in nima ničel.

**Definicija 3.10** (Kvadratna funkcija). Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oblike

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

se imenuje *kvadratna funkcija*. Njena grafična predstavitev je parabola.

Parabola je odprta navzgor, če  $a > 0$ , in navzdol, če  $a < 0$ .



Slika 3.1: Paraboli pri  $a > 0$  in  $a < 0$

Ključni elementi kvadratne funkcije  $f(x) = ax^2 + bx + c$  so:

- ničle (izračunamo jih tako, da rešimo enačbo  $ax^2 + bx + c = 0$ ),
- teme parabole, zapisano v temenski obliki

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + f(x_0), \quad x_0 = -\frac{b}{2a},$$

- os simetrije parabole  $x = x_0$ .

*Primer 3.8.* Za funkcijo  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  velja:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2, \quad f(2) = -1,$$

zato je temenska oblika

$$f(x) = (x - 2)^2 - 1.$$

Ničli sta  $x = 1$  in  $x = 3$ .

**Definicija 3.11** (Ničle kvadratne funkcije). Naj bo dana kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Ničle funkcije  $f$  so rešitve enačbe  $ax^2 + bx + c = 0$ . Te dobimo s pomočjo diskriminante

$$D = b^2 - 4ac.$$

Velja:

- če je  $D > 0$ , ima kvadratna funkcija dve različni realni ničli;
- če je  $D = 0$ , ima eno (dvojno) realno ničlo;
- če je  $D < 0$ , funkcija nima realnih ničel.

Rešitvi podamo z obrazcem

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

*Primer 3.9.* Določimo ničle funkcije  $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ .

Najprej izračunamo diskriminanto:

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25.$$

Ker je  $D > 0$ , ima funkcija dve različni realni ničli:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

Tako dobimo

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

**Definicija 3.12** (Polinom). Funkcija  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oblike

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kjer je  $n \in \mathbb{N}$  in  $a_n \neq 0$ , se imenuje *polinom stopnje  $n$* .

Osnovne lastnosti polinomov:

- polinomi imajo **končno mnogo ničel**;
- polinom stopnje  $n$  ima največ  $n$  realnih ničel (upoštevajoč večkratnosti);
- graf polinoma je gladka neprekinjena krivulja.

*Primer 3.10.* Naj bo  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$ .

1.  $P$  je polinom stopnje 3 (vodilni koeficient  $a_3 = 2$ ).

2. Ker je stopnja liha,  $P(x) \rightarrow -\infty$  pri  $x \rightarrow -\infty$  in  $P(x) \rightarrow +\infty$  pri  $x \rightarrow +\infty$ .
3. Polinom lahko zapišemo kot produkt  $(x-1)(2x^2-x-2)$ , zato ima tri ničle.

**Definicija 3.13** (Hornerjev algoritem). Za polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

želimo učinkovito izračunati vrednost  $P(t)$  pri danem  $t \in \mathbb{R}$ . Hornerjev algoritem temelji na postopnem izluščanju faktorja  $(x-t)$  in omogoča izračun vrednosti polinoma s časovno zahtevnostjo  $O(n)$ .

Polinom najprej prepisemo v obliko

$$P(x) = (\cdots (a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_0.$$

Vrednost  $P(t)$  izračunamo rekurzivno:

$$b_n = a_n, \quad b_{k-1} = a_{k-1} + t b_k, \quad k = n, n-1, \dots, 1.$$

Tedaj velja  $P(t) = b_0$ .

*Primer 3.11.*

Izračunajmo  $P(3)$  za polinom

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1.$$

Koeficiente zapišemo v vrstico:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & 4 & 1 \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

Postopek:

$$\begin{aligned} b_3 &= 2, \\ b_2 &= -5 + 3 \cdot b_3 = -5 + 6 = 1, \\ b_1 &= 4 + 3 \cdot b_2 = 4 + 3 = 7, \\ b_0 &= 1 + 3 \cdot b_1 = 1 + 21 = 22. \end{aligned}$$

Torej

$$P(3) = 22.$$

### 3.2.2 Racionalne funkcije

**Definicija 3.14** (Racionalna funkcija). Naj bosta  $P$  in  $Q$  polinoma z realnimi koeficienti, pri čemer  $Q$  ni ničelni polinom. Funkcija

$$R : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kjer je

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\},$$

se imenuje *racionalna funkcija*.

**Ničle in poli racionalne funkcije.**

Naj bo  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  racionalna funkcija, kjer sta  $p(x)$  in  $q(x)$  polinoma.

- *Ničle racionalne funkcije*  $R(x)$  so tiste vrednosti  $x$ , za katere velja  $R(x) = 0$ . Dobimo jih tako, da rešimo enačbo

$$p(x) = 0,$$

pri čemer mora veljati  $q(x) \neq 0$ .

- *Poli racionalne funkcije*  $R(x)$  so tiste vrednosti  $x$ , pri katerih je imenovalac enak nič:

$$q(x) = 0.$$

Če se ustrezen faktor ne pokrajša s števcem, v teh točkah funkcija ni definirana in ima *navpične asimptote*.

**Asimptote racionalne funkcije.**

Naj bo  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  racionalna funkcija, kjer sta  $p$  in  $q$  polinoma. Vrsta asimptote je odvisna od stopenj polinomov  $p(x)$  in  $q(x)$ . Asimptota je premica, ki se ji graf funkcije vse bolj približuje, ko gre  $x$  proti  $\pm\infty$  (pri vodoravni in poševni asimptoti) oziroma ko se  $x$  približuje polu.

- Če je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca, ima funkcija vodoravno asimptoto

$$y = 0.$$

- Če je stopnja števca enaka stopnji imenovalca, ima funkcija vodoravno asimptoto, ki je enaka razmerju vodilnih koeficientov:

$$y = \frac{a_n}{b_n}.$$

- Če je stopnja števca za 1 večja od stopnje imenovalca, ima funkcija poševno asimptoto. Določimo jo z deljenjem polinomov:

$$R(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kjer je  $k(x)$  linearna funkcija, ki predstavlja enačbo poševne asimptote.

*Primer 3.12.* Obravnavajmo racionalno funkcijo

$$R(x) = \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4x + 3}.$$

**1. Ničle racionalne funkcije.** Ničle dobimo tako, da rešimo enačbo  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ . Diskriminanta je

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49.$$

Tako sta ničli

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 7}{4}.$$

Dobimo

$$x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1.$$

Obe ničli sta lihe (prve) stopnje, zato graf racionalne funkcije seka os  $x$  v točkah  $x_1 = \frac{5}{2}$  in v  $x_2 = -1$ . V primeru, da je ničla sode stopnje se graf racionalne funkcije v tej točki osi  $x$  dotakne.

**2. Poli racionalne funkcije.** Poli so tiste vrednosti  $x$ , za katere je imenovalac enak 0. Rešimo enačbo  $x^2 - 4x + 3 = 0$ :

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Tako ima funkcija pola in navpični asimptoti v

$$x = 1 \quad \text{in} \quad x = 3.$$

### 3. Asimptota racionalne funkcije.

Ker je stopnja števca enaka stopnji imenovalca, ima funkcija vodoravno asimptoto. Ta je enaka razmerju vodilnih koeficientov:

$$y = \frac{2}{1} = 2.$$

Torej je vodoravna asimptota funkcije

$$y = 2.$$

To lahko preverimo tudi z deljenjem polinomov:

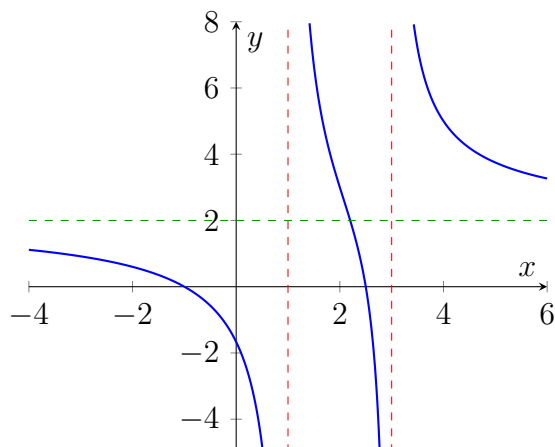
$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x^2 - 4x + 3) + (5x - 11).$$

Zato lahko funkcijo zapišemo v obliki

$$R(x) = 2 + \frac{5x - 11}{x^2 - 4x + 3}.$$

**Zaključek.** Racionalna funkcija  $R(x)$  ima:

- dve ničli:  $x = -1$  in  $x = \frac{5}{2}$ ,
- dva pola:  $x = 1$  in  $x = 3$ ,
- vodoravno asiptoto:  $y = 2$ .

Slika 3.2: Graf racionalne funkcije  $R(x)$ 

### 3.2.3 Potenčna funkcija

**Definicija 3.15** (Potenčna funkcija). Potenčna funkcija je funkcija oblike

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

pri čemer je definicijsko območje  $D$  odvisno od vrednosti eksponenta  $\alpha$ .

*Opomba 7.* Za celoštevilске eksponente je potenčna funkcija definirana na  $\mathbb{R}$ , za racionalne in realne eksponente pa je definicijsko območje običajno podmnožica  $\mathbb{R}$ , najpogosteje  $(0, \infty)$ .

Potenčne funkcije se obnašajo različno glede na to, ali je  $\alpha$ :

- naravno število,
- celo število,
- racionalno ali realno število,
- pozitivno ali negativno,
- liho ali sodo.

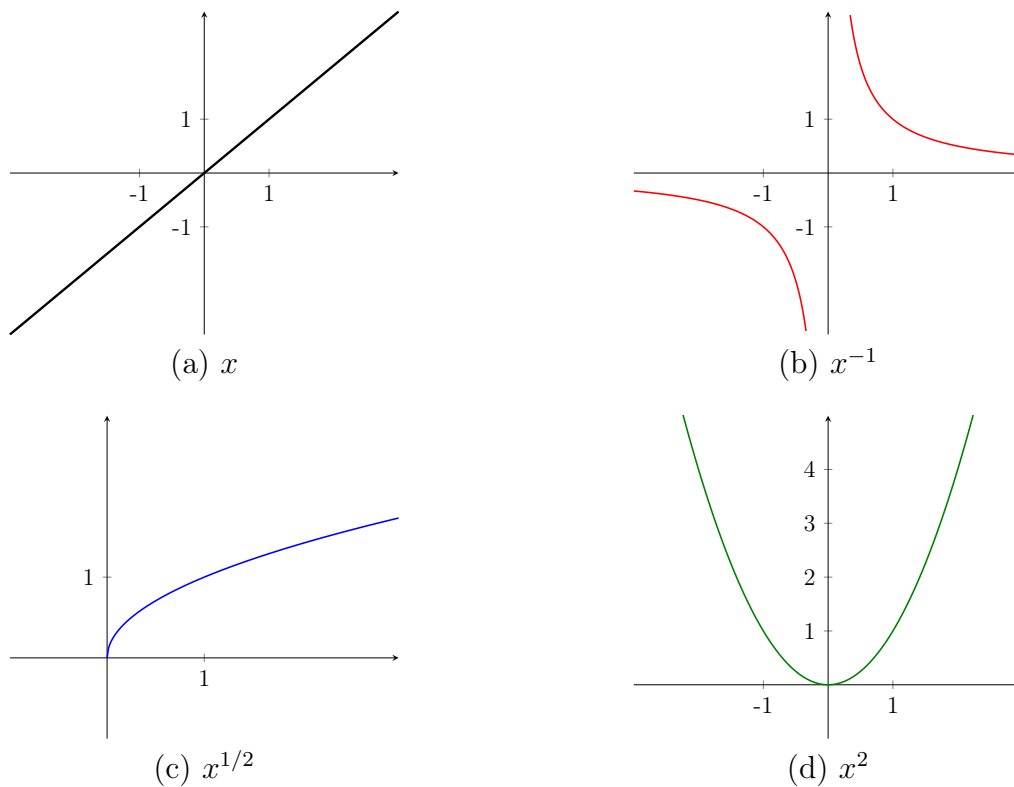
**Osnovne lastnosti:**

- Če je  $\alpha$  **liho naravno število**, je  $x^\alpha$  liha funkcija.
- Če je  $\alpha$  **sodo naravno število**, je  $x^\alpha$  soda funkcija.
- Če je  $\alpha > 0$ , je funkcija na  $(0, \infty)$  **naraščajoča**.
- Če je  $\alpha < 0$ , je funkcija na  $(0, \infty)$  **padajoča** in nima vrednosti v  $x = 0$ .
- Za negativne eksponente  $x^\alpha = \frac{1}{x^{|\alpha|}}$ .

- Za  $0 < \alpha < 1$  je funkcija na  $(0, \infty)$  naraščajoča, a *ukrivljenost* je konkavna.
- Za  $\alpha > 1$  je funkcija konveksna na  $(0, \infty)$ .
- Za  $\alpha = 0$  velja  $x^0 = 1$  (razen v  $x = 0$ , kjer funkcija ni definirana).

*Primer 3.13.* Razmislimo o funkcijah  $x^\alpha$  za  $\alpha = -1, \frac{1}{2}, 1, 2$ .

1.  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$  je padajoča in ni definirana v  $x = 0$ .
2.  $g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$  je naraščajoča, definirana na  $[0, \infty)$ .
3.  $h(x) = x$  je linearna, naraščajoča.
4.  $k(x) = x^2$  je soda funkcija, konveksna, odprta navzgor.



Slika 3.3: Grafi funkcij  $x$ ,  $x^{-1}$ ,  $x^{1/2}$  in  $x^2$

### 3.2.4 Eksponentna funkcija

**Definicija 3.16** (Eksponentna funkcija). Eksponentna funkcija je funkcija oblike

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Osnovne lastnosti eksponentne funkcije  $f(x) = a^x$ :

- **Definicijsko območje:**  $D_f = \mathbb{R}$ .
- **Zaloga vrednosti:**  $Z_f = (0, \infty)$ , zato je  $a^x > 0$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$ .
- **Monotonost:**
  - če je  $a > 1$ , je  $f$  strogo naraščajoča;
  - če je  $0 < a < 1$ , je  $f$  strogo padajoča.

- **Točke na grafu:**

$$f(0) = 1, \quad f(1) = a.$$

Graf vedno poteka skozi točki  $(0, 1)$  in  $(1, a)$ .

- **Asimptota:** premica  $y = 0$  je vodoravna asimptota
- **Inverz:** eksponentna funkcija ima inverzno funkcijo  $\log_a x$ , imenovano *logaritemska funkcija*.

*Primer 3.14.* Razmislimo o eksponentnih funkcijah

$$f(x) = 2^x \quad \text{in} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

1. Za  $f(x) = 2^x$  je osnova  $a = 2 > 1$ , zato je funkcija strogo naraščajoča. Velja

$$f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

2. Za  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  je osnova  $a = \frac{1}{2}$ ,  $0 < a < 1$ , zato je funkcija strogo padajoča. Velja

$$g(-1) = 2, \quad g(0) = 1, \quad g(1) = \frac{1}{2}, \quad g(2) = \frac{1}{4}.$$

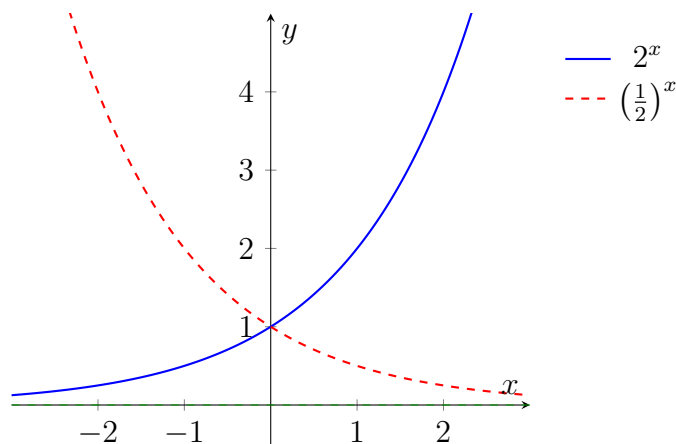
3. Obe funkciji sta pozitivni in imata isto vodoravno asimptoto  $y = 0$ .

Na sliki 3.4 sta prikazana grafa eksponentnih funkcij  $f(x)$  in  $g(x)$ .

### 3.2.5 Logaritemska funkcija

**Definicija 3.17** (Logaritemska funkcija). Logaritemska funkcija je funkcija oblike

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Slika 3.4: Grafi eksponentnih funkcij  $2^x$  in  $(\frac{1}{2})^x$ 

Osnovne lastnosti logaritemske funkcije  $f(x) = \log_a x$ :

- **Definicijsko območje:**  $D_f = (0, \infty)$ .
- **Zaloga vrednosti:**  $Z_f = \mathbb{R}$ .
- **Monotonost:**
  - če je  $a > 1$ , je  $\log_a x$  strogo naraščajoča;
  - če je  $0 < a < 1$ , je  $\log_a x$  strogo padajoča.
- **Ničla:**  $\log_a x = 0$  natanko pri  $x = 1$ .
- **Asimptota:** navpična asimptota  $x = 0$ .
- **Posebne vrednosti:**

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

*Primer 3.15.* Obravnavajmo logaritmski funkciji

$$f(x) = \log_2 x \quad \text{in} \quad g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

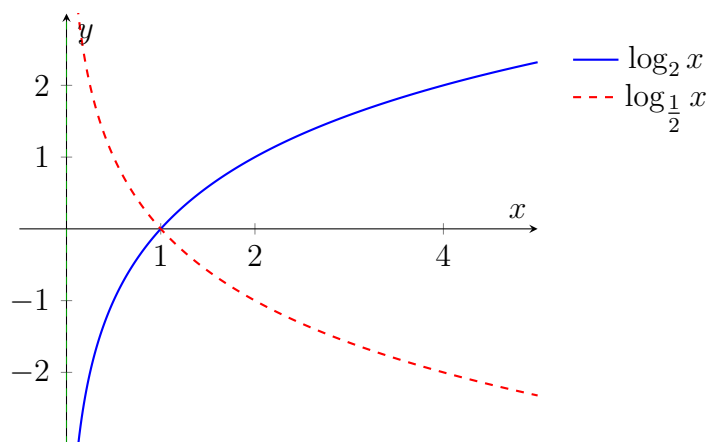
1. Funkcija  $f(x) = \log_2 x$  je strogo naraščajoča (osnova  $2 > 1$ ) in velja:

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(4) = 2.$$

2. Funkcija  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$  je strogo padajoča (osnova  $\frac{1}{2} < 1$ ) in velja:

$$g(1) = 0, \quad g(2) = -1, \quad g(4) = -2.$$

3. Obe funkciji imata navpično asimptoto  $x = 0$ .

Slika 3.5: Grafi logaritmskih funkcij  $\log_2 x$  in  $\log_{\frac{1}{2}} x$ 

### 3.2.6 Trigonometrične funkcije

**Definicija 3.18** (Trigonometrične funkcije). Osnovne trigonometrične funkcije so sinus, kosinus, tangens in kotangens. Za vsak  $x \in \mathbb{R}$  definiramo

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pri tem sta funkciji  $\sin x$  in  $\cos x$  definirani za vse  $x \in \mathbb{R}$ , funkciji  $\tan x$  in  $\cot x$  pa povsod tam, kjer imenovalec ni enak 0.

**Osnovne lastnosti funkcij  $\sin x$  in  $\cos x$ :**

- **Periodičnost:** obe funkciji imata periodo  $2\pi$ .
- **Omejenost:**  $-1 \leq \sin x \leq 1$  in  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .
- **Ničle:**

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \quad \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- **Simetrija:**

$$\sin(-x) = -\sin x \quad (\text{liha funkcija}), \quad \cos(-x) = \cos x \quad (\text{soda funkcija}).$$

**Osnovne lastnosti funkcij  $\tan x$  in  $\cot x$ :**

- **Periodičnost:**

$$\tan x \text{ ima periodo } \pi, \quad \cot x \text{ ima periodo } \pi.$$

- **Asimptote:**

$$\tan x \text{ ima navpične asimptote pri } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\cot x \text{ ima navpične asimptote pri } x = k\pi.$$

- Ničle:

$$\tan x = 0 \iff x = k\pi, \quad \cot x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

- Simetrija:

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x.$$

*Primer 3.16.* Za izbrane vrednosti funkcij velja:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\tan 0 = 0, \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

### Periodičnost trigonometričnih funkcij

Za poljuben kot  $x$  definiramo trigonometrične funkcije na naslednji način:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(x + 2k\pi), \\ \sin x &= \sin(x + 2k\pi), \\ \tan x &= \tan(x + k\pi), \\ \cot x &= \cot(x + k\pi), \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pravimo, da sta funkciji sinus in kosinus *periodični* z osnovno periodo  $2\pi$ , tangens in kotangens pa s periodo  $\pi$ . Na sliki 3.6 so predstavljeni grafi funkcij  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  in  $\cot x$ .

### Trigonometrijske identitete in adicijski izreki

Trigonometrijske funkcije niso pomembne le pri obravnavi kotov in geometrije, temveč tudi kot osnovna orodja pri analizi periodičnih pojavov, diferencialnih enačb, signalov in periodičnih funkcij. Njihove medsebojne povezave so zapisane v številnih identitetah, ki omogočajo pretvarjanje izrazov, poenostavljanje, reševanje enačb ter analizo bolj zapletenih trigonometrijskih izrazov. V nadaljevanju podamo najpomembnejše identitete, ki jih pogosto uporabljamo pri reševanju nalog.

#### a. Povezave med kotnimi funkcijami istega kota

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, & \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \\ 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}, & 1 + \cot^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

**b. Adicijski izreki**

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha},$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}.$$

**c. Dvojni koti**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha},$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}.$$

**d. Trojni koti**

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

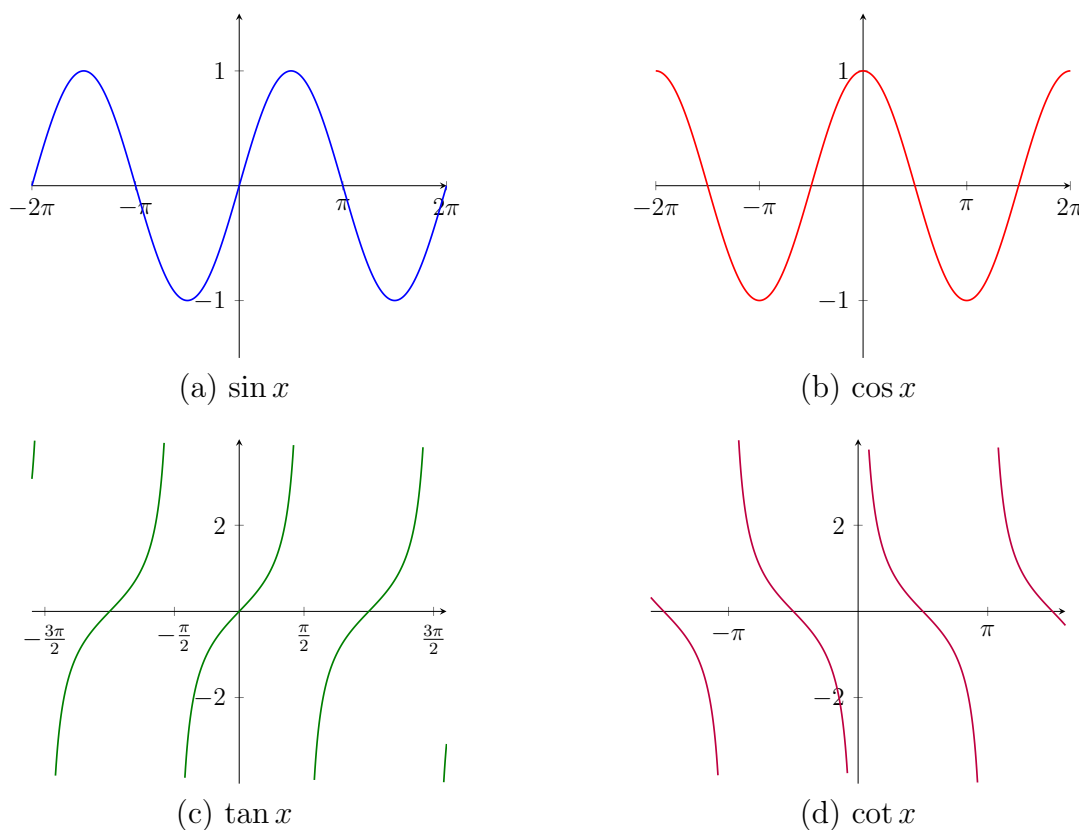
**e. Polovični koti** Predznak pri polovičnih kotih je odvisen od kvadranta, v katerem leži  $\frac{\alpha}{2}$ .

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Slika 3.6: Grafi trigonometričnih funkcij  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  in  $\cot x$ 

### 3.2.7 Ciklometrične funkcije

*Ciklometrične funkcije* so inverzne oziroma obratne funkcije osnovnih trigonometričnih funkcij. Ker trigonometrične funkcije na celotni realni osi niso injektivne, jih za potrebe obratne funkcije omejimo na intervale, kjer so monotone. Včasih za ciklometrične funkcije uporabljamo tudi izraz *krožne funkcije*. Mednje sodijo arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens.

#### Definicije ciklometričnih funkcij

##### Arkus sinus.

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Osnovne značilnosti ( $D$  pomeni definicijsko območje,  $Z$  pa zaloga vrednosti):

$$D_{\arcsin} = [-1, 1], \quad Z_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin x \text{ je naraščajoča funkcija.}$$

##### Arkus kosinus.

$$\arccos x = y \iff \cos y = x, \quad y \in [0, \pi].$$

Osnovne značilnosti:

$$D_{\arccos} = [-1, 1], \quad Z_{\arccos} = [0, \pi], \quad \arccos x \text{ je padajoča funkcija.}$$

**Arkus tangens.**

$$\arctan x = y \iff \tan y = x, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Osnovne značilnosti:

$$D_{\arctan} = \mathbb{R}, \quad Z_{\arctan} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \arctan x \text{ je naraščajoča.}$$

Asimptoti:

$$y = \pm \frac{\pi}{2}.$$

**Arkus kotangens.**

$$\operatorname{arccot} x = y \iff \cot y = x, \quad y \in (0, \pi).$$

Osnovne značilnosti:

$$D_{\operatorname{arccot}} = \mathbb{R}, \quad Z_{\operatorname{arccot}} = (0, \pi), \quad \operatorname{arccot} x \text{ je padajoča.}$$

**Zveze med ciklometričnimi funkcijami**

Osnovne povezave:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1],$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Medsebojna pretvorba:

$$\arcsin x = \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right), \quad |x| < 1,$$

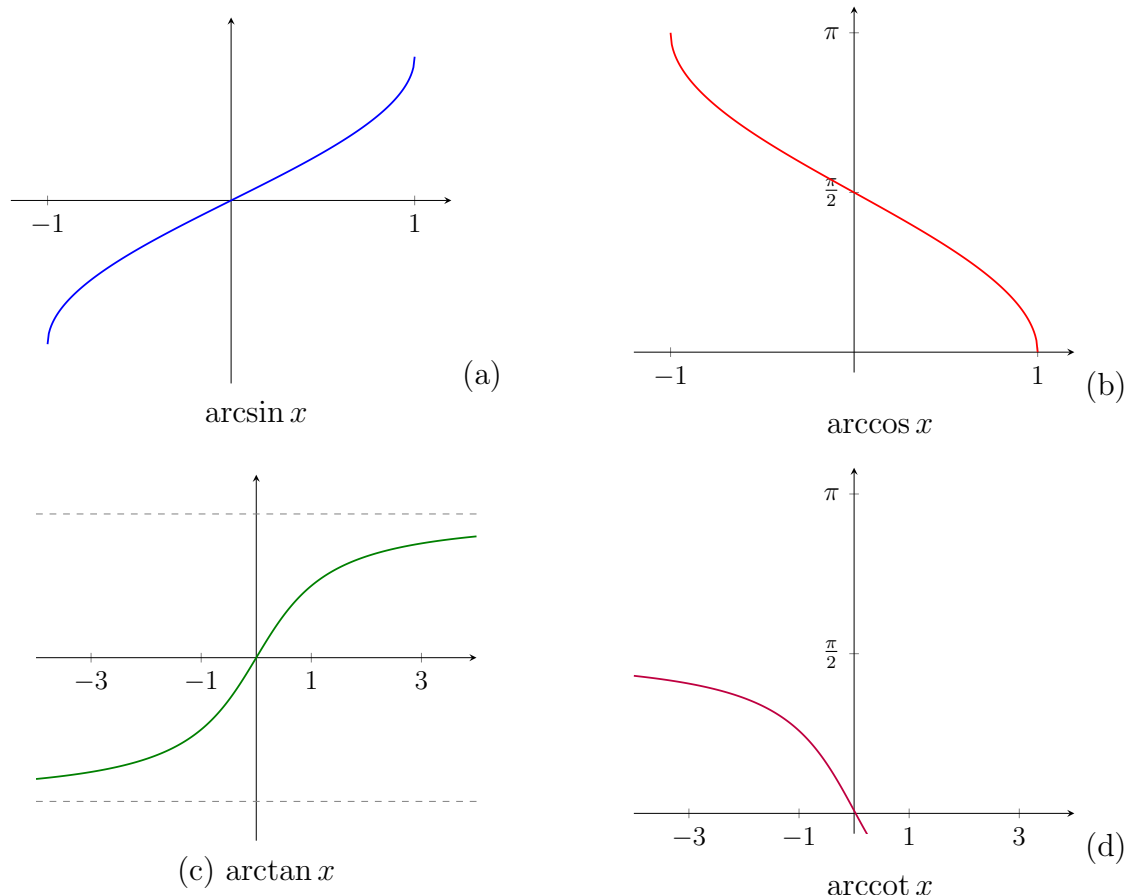
$$\arccos x = \arctan \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right), \quad x > 0.$$

Povezave z eksponentnimi funkcijami (kompleksna oblika):

$$\arctan x = \frac{i}{2} \ln \left( \frac{1-ix}{1+ix} \right).$$

**Grafi ciklometričnih funkcij**

Grafi ciklometričnih funkcij prikazujejo obratno zvezo med vrednostjo funkcije in kotom pri osnovnih trigonometričnih funkcijah. Pri tem je treba upoštevati omejene definicijske množice, na katerih so trigonometrične funkcije injektivne, kar omogoča obstoj njihovih inverzov.



Slika 3.7: Grafi ciklometričnih funkcij  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  in  $\operatorname{arccot} x$ .

### 3.2.8 Hiperbolične funkcije

*Hiperbolične funkcije* so analog trigonometričnih funkcij, vendar namesto kroga izhajajo iz geometrije hiperbole. Definirane so s pomočjo eksponentne funkcije in imajo številne lastnosti, ki so podobne trigonometričnim funkcijam, vendar s pomembnimi razlikami. V analizi nastopajo pri reševanju diferencialnih enačb, parametrizacijah hiperbole, teoriji verig in v matematični fiziki.

Osnovne hiperbolične funkcije so:

$$\sinh x, \quad \cosh x, \quad \tanh x, \quad \operatorname{coth} x.$$

#### Definicije hiperboličnih funkcij

**Hiperbolični sinus.**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Značilnosti:

$$\sinh x \text{ je liha funkcija,} \quad \sinh 0 = 0.$$

**Hiperbolični kosinus.**

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Značilnosti:

$$\cosh x \text{ je soda funkcija,} \quad \cosh x \geq 1, \quad \cosh 0 = 1.$$

**Hiperbolični tangens.**

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Značilnosti:

$$-1 < \tanh x < 1, \quad \tanh x \text{ je naraščajoča.}$$

**Hiperbolični kotangens.**

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Značilnosti:

$$|\coth x| > 1, \quad x \neq 0.$$

**Osnovne zveze med hiperboličnimi funkcijami**

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ 1 - \tanh^2 x &= \operatorname{sech}^2 x, \quad \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x. \end{aligned}$$

*Primer 3.17.* Izračunajmo vrednosti hiperboličnih funkcij pri  $x = 0$  in  $x = 1$ :

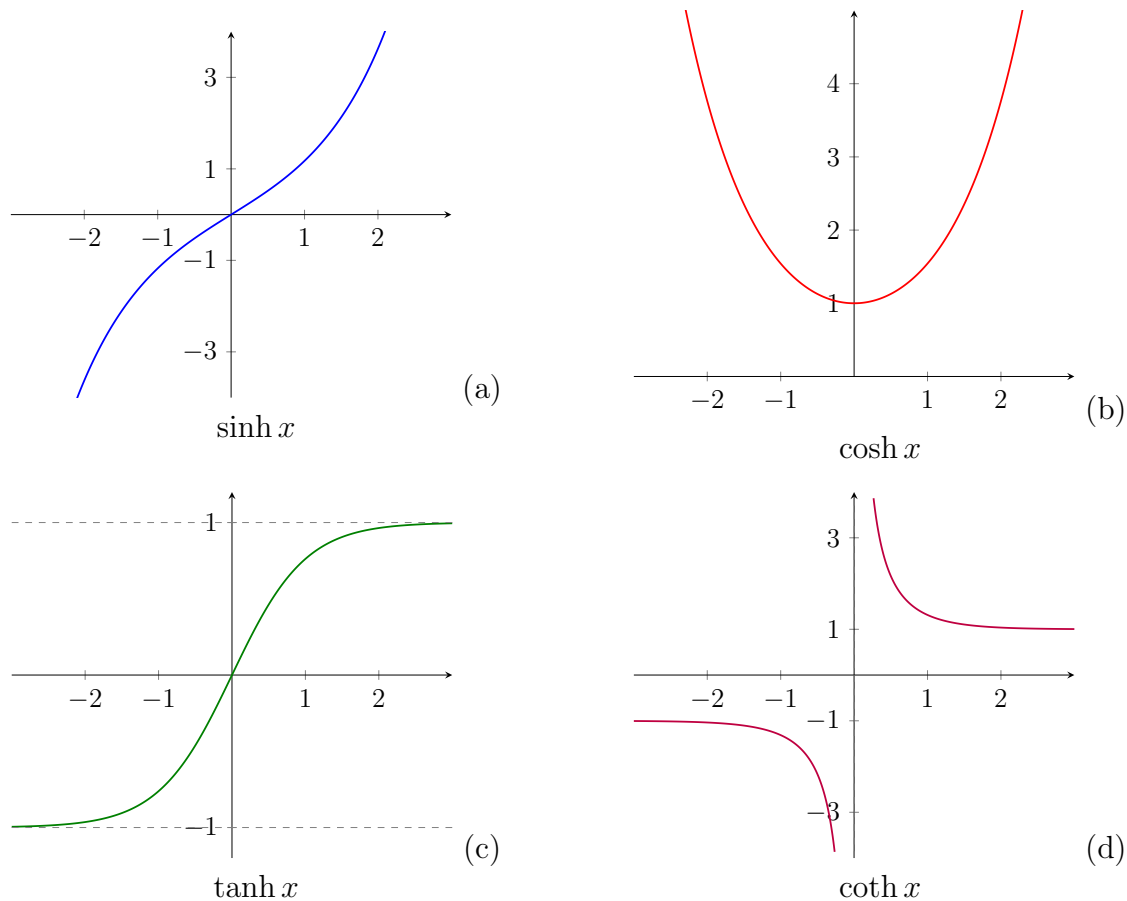
$$\begin{aligned} \sinh 0 &= 0, & \cosh 0 &= 1, & \tanh 0 &= 0, \\ \sinh 1 &= \frac{e - e^{-1}}{2}, & \cosh 1 &= \frac{e + e^{-1}}{2}, & \tanh 1 &= \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}. \end{aligned}$$

**Grafi hiperboličnih funkcij**

Grafi hiperboličnih funkcij ponazarjajo značilno rast in simetrije funkcij, ki izhajajo iz eksponentne definicije in so povezane z geometrijo hiperbole. Njihova oblika in asimptotsko obnašanje se bistveno razlikujeta od trigonometričnih funkcij, kljub nekaterim formalnim podobnostim.

**Zveze med ciklotričnimi in hiperboličnimi funkcijami**

Zveze med ciklotričnimi in hiperboličnimi funkcijami izhajajo iz njihovih eksponentnih zapisov in omogočajo prehod med različnimi vrstami inverznih funkcij. Te povezave so pomembne tako z vidika teorije kot tudi pri praktičnih izračunih v analizi in matematični fiziki.

Slika 3.8: Grafi hiperboličnih funkcij  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ ,  $\tanh x$  in  $\coth x$ .

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln \left( x + \sqrt{x-1} \sqrt{x+1} \right), \quad x \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

## Naloge

1. Določi ničlo in nariši graf linearne funkcije  $f(x) = 3x - 5$ .
2. Preuči, ali je funkcija  $g(x) = 2x + 1$  naraščajoča ali padajoča. Nariši graf funkcije  $g(x)$ .
3. Izračunaj ničle in nariši graf kvadratne funkcije  $h(x) = x^2 - 7x + 10$ .
4. Določi vrh parabole funkcije  $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$  in nariši graf.
5. Nariši graf funkcije  $p(x) = x^2 - 4$  ter označi ničle in teme.
6. Za polinom  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 4$  izračunaj  $P(2)$  s Hornerjevim algoritmom.

7. Razporedi funkcije glede na stopnjo:

$$f_1(x) = x^4 - 3x + 1, \quad f_2(x) = 3x - 2, \quad f_3(x) = x^2 + x.$$

8. Določi intervale monotonosti funkcije  $f(x) = x^3 - 3x$ .

9. Preuči, ali je funkcija  $f(x) = x^2 - 1$  soda, liha ali nič od tega.

10. Izračunaj kompozituma  $f(g(x))$  in  $g(f(x))$  za  $f(x) = x^2$  in  $g(x) = 2x - 1$ .

11. Določi ničle in pole ter nariši graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}.$$

12. Izračunaj definicijsko območje funkcije

$$g(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 4}.$$

13. Nariši graf funkcije

$$h(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

in označi asimptote.

14. Določi, ali je funkcija  $f(x) = x^{3/2}$  naraščajoča ali padajoča.

15. Izračunaj  $g(x) = x^{-2}$  za  $x = 1, 2, 4$ .

16. Nariši graf funkcije  $h(x) = \sqrt{x - 2}$  in označi njeno definicijsko območje.

17. Izračunaj vrednosti:  $2^0, 2^1, 2^{-1}, 2^2$ .

18. Določi, ali je funkcija  $f(x) = 1 - 3^x$  naraščajoča ali padajoča.

19. Izračunaj  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  za  $x = -2, -1, 0, 1$ .

20. Določi vodoravno asimptoto funkcije  $h(x) = 2^x$ .

21. Nariši graf funkcije  $f(x) = e^x$ .

22. Izračunaj  $\log_2 8$  in  $\log_{10} 1000$ .

23. Reši enačbo  $\log_3 x = 2$ .

24. Določi definicijsko območje in nariši graf funkcije  $f(x) = 2 \ln(x - 1) + 1$ .

25. Preveri, ali je funkcija  $\log_2 x$  naraščajoča ali padajoča.

26. Izračunaj vrednosti:

$$\sin 0, \quad \sin \frac{\pi}{2}, \quad \cos 0, \quad \cos \frac{\pi}{2}, \quad \tan \frac{\pi}{4}.$$

27. Nariši graf funkcije  $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

28. Izračunaj vrednosti:

$$\arcsin 0, \quad \arccos 1, \quad \arctan 1.$$

29. Izračunaj  $\sinh 0, \quad \cosh 0, \quad \tanh 0$ , ter nariši graf  $\tanh x$ .

### 3.3 Limita in zveznost funkcije

#### Uvod

Pojma *limita* in *zveznost* sta med najosnovnejšimi gradniki matematične analize. Omogočata nam natančno opisovanje lokalnega obnašanja funkcij, razumevanje prehodov med vrednostmi ter formalizacijo pojmov, kot so približevanje, sprememba in gladkost grafov funkcij. Natančna formalna definicija teh dveh pojmov je rezultat stoletij matematičnega razvoja.

Prvi zametki razmišljanja o limitah segajo že v antično Grčijo. Evklid in njegovi nasledniki so se pri obravnavi geometrije pogosto poslužili postopkov, ki bi jih danes prepoznali kot limitne postopke. Med bolj znane metode sodi *Evdoksov postopek izčrpanja* (ang. Eudoxus' method of exhaustion), ki implicitno uporablja idejo približevanja vrednosti. Prvotna zamisel se je pojavila v poznem 5. stoletju pr. n. št. pri Antifontu (480–411 pr. n. št.), čeprav ni povsem jasno, kako dobro jo je razumel. Evdoks iz Knida (408–355 pr. n. št.), eden največjih matematikov antične Grčije, je metodo natančno opredelil. Z njo lahko poljubno natančno izračunamo površino ali prostornino geometrijskega lika, tako da jo izračunamo znotraj ali zunaj z vedno boljšimi približki. Ta metoda je predstavljena v Evklidovih Elementih (Knjiga XII), ki temeljijo na Evdoksovem delu. Kasneje je na Kitajskem v 3. st. to metodo uporabil Liu Hui, da bi izračunal površino kroga. Izraz za to metodo je prvič uporabil leta 1647 Gregor Sveti Vincent v delu *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum*.

V 17. stoletju sta Newton in Leibniz razvila infinitezimalni račun (diferencialni in integralni račun), pri čemer sta intuitivno uporabljala pojma »neskončno majhne spremembe« in »približevanje vrednostim«. Kljub izjemni uporabnosti pa takratni pristopi niso imeli strogega matematičnega temelja.

Preboj se je zgodil šele v 19. stoletju, ko sta Augustin-Louis Cauchy in kasneje Karl Weierstrass (1815-1897) razvila formalno  $\varepsilon$ - $\delta$  definicijo limite. S tem je analiza dobila današnjo strogo obliko. Weierstrassova formalizacija limite odpravlja potrebo po neskončno majhnih količinah in temelji izključno na odnosu med razdaljami v realnih številih, kar ustreza topološki strukturi  $\mathbb{R}$ , podrobno predstavljeni v prejšnjih poglavjih.

Limita funkcije opisuje, kako se funkcija obnaša v okolici določene točke - ne nujno v sami točki. Gre za temeljni koncept, ki omogoča definicijo:

- zveznosti,
- odvoda,
- integrala,
- različice izrekov srednje vrednosti,
- približkov in Taylorjevih vrst.

Pojma limita in zveznost se v veliki meri opirata na lastnosti realnih števil (npr. popolnost realne množice, supremum), zato sta tesno povezana s študijem zaporedij, saj lahko limito funkcije v eni spremenljivki definiramo tudi preko limit zaporedij, kar bomo spoznali kasneje.

V tem poglavju bomo uvedli:

- formalno definicijo limite funkcije (Cauchy/Weierstrass),
- osnovne lastnosti limit,
- leve in desne limite,
- enostranske limite in limite pri neskončnosti,
- natančno definicijo zveznosti,
- osnovne izreke o zveznosti na intervalih (vključno z izrekoma o največji in najmanjši vrednosti ter o vmesni vrednosti),
- primere, ki ilustrirajo tipične oblike prekinitvenih točk.

### 3.3.1 Limita funkcije

**Definicija 3.19.** Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in naj bo  $a$  točka, ki je adherentna točka množice  $D \setminus \{a\}$ . Pravimo, da ima funkcija  $f$  limito  $L \in \mathbb{R}$  v točki  $a$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$  tako, da za vse  $x \in D$  velja:

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

To zapišemo kot

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Definicija pomeni, da lahko vrednosti funkcije  $f(x)$  naredimo poljubno blizu  $L$ , če vrednosti  $x$  vzamemo dovolj blizu točke  $a$  (vendar ne v sami točki  $a$ ).

*Primer 3.18.* Izračunajmo limito funkcije  $f(x) = 2x - 1$  v točki  $a = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Ker gre za linearno funkcijo, se vrednosti  $f(x)$  spreminjajo enakomerno z  $x$ , zato se  $f(x)$  približuje 5, ko se  $x$  približuje 3.

*Primer 3.19.* Pokažimo, da

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Za dani  $\varepsilon > 0$  izberimo  $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ . Če  $|x - 2| < \delta \leq 1$ , potem je  $x \in (1, 3)$  in zato

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5\delta \leq 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

S tem smo dokazali, da limita res obstaja in je enaka 4.

*Primer 3.20.* Limita lahko obstaja, tudi če funkcija *ni definirana* v točki, kamor se približujemo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Ker

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2,$$

dobimo

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4,$$

čeprav  $f(2)$  ni definirana.

### Leva in desna limita

**Definicija 3.20.** Limita funkcije  $f(x)$  pri približevanju iz leve (z manjšimi vrednostmi) je:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Definicija 3.21.** Limita funkcije  $f(x)$  pri približevanju iz desne (z večjimi vrednostmi) je:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

**Trditev 3.1.** Limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  obstaja natanko tedaj, ko obstajata obe enostranski limiti in je

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

*Primer 3.21.* Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

ima levo in desno limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2.$$

Ker se levi in desni limiti razlikujeta, limita  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  ne obstaja.

### Lastnosti limit

**Trditev 3.2** (Linearne kombinacije). Če obstajata limiti  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  in  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , potem velja:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= L + M, \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) &= L - M, \\ \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) &= cL \quad \text{za vsak } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Trditev 3.3** (Produkt in količnik). Če  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  in  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , potem:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM.$$

Če je  $M \neq 0$ , potem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

**Trditev 3.4** (Omejena funkcija). Če je  $g$  omejena v okolici točke  $a$  in  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , potem

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

**Trditev 3.5** (Stisnjeno pravilo, angl. Sandwich theorem, Squeeze theorem). Če za vse  $x$  v neki okolici točke  $a$  velja:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x),$$

in

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L,$$

potem obstaja tudi limita  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  in je enaka  $L$ .

### Limite pri neskončnosti

Doslej smo obravnavali limite funkcij v izbranih končnih točkah  $a \in \mathbb{R}$ . Pomemben primer v analizi pa predstavljajo tudi limiti, kjer se spremenljivka  $x$  oddaljuje proti  $\infty$  ali  $-\infty$ . Pri takšnih limitah opisujemo obnašanje funkcije pri velikih absolutnih vrednostih argumenta.

**Definicija 3.22.** Pravimo, da ima funkcija  $f$  *limito*  $L \in \mathbb{R}$ , ko  $x \rightarrow \infty$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja število  $K \in \mathbb{R}$  tako, da

$$x > K \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

To zapišemo kot

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L.$$

Analogno definiramo limito pri  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Intuitivno pomeni, da se vrednosti funkcije  $f(x)$  približujejo številu  $L$ , ko  $x$  postaja vedno večji (oz. vedno manjši).

*Primer 3.22.* Za funkcijo

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

Razlog je, da  $\frac{3}{x}$  postane poljubno majhen (po absolutni vrednosti), ko se  $|x|$  poljubno poveča.

*Primer 3.23.* Za funkcijo

$$f(x) = \arctan(x)$$

velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Gre za tipičen primer funkcije, ki ima vodoravni asimptoti.

*Primer 3.24.* Če je  $p(x)$  polinom stopnje  $n$ , potem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{če je vodilni koeficient pozitiven,} \\ -\infty, & \text{če je vodilni koeficient negativen.} \end{cases}$$

Obnašanje polinoma pri neskončnosti določa le njegov vodilni člen.

### Limita funkcije v neskončnosti

Včasih se vrednost funkcije ne približuje številu  $L$ , temveč se njene vrednosti oddaljujejo brez meje. V tem primeru govorimo o limiti funkcije, ki je enaka  $\infty$  ali  $-\infty$ .

**Definicija 3.23.** Pravimo, da je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

če za vsak  $M > 0$  obstaja  $\delta > 0$  tako, da velja:

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Analogno je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

če za vsak  $M > 0$  obstaja  $\delta > 0$  tako, da

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -M.$$

*Primer 3.25.* Za funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Ko se  $x$  približuje 0 (z obeh strani), vrednosti funkcije naraščajo brez meje.

*Primer 3.26.* Za funkcijo

$$f(x) = \ln(x)$$

velja

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

Logaritemska funkcija raste brez zgornje meje, vendar izjemno počasi.

*Primer 3.27.* Za racionalno funkcijo

$$f(x) = \frac{2x - 5}{x}$$

dobimo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

S preureditvijo

$$f(x) = 2 - \frac{5}{x}$$

vidimo, da ima funkcija vodoravno asimptoto  $y = 2$ .

### 3.3.2 Zveznost funkcije

Intuitivno je funkcija zvezna, kadar njen graf lahko narišemo v enem zamahu brez dvigovanja svinčnika, graf funkcije torej ni prekinjen. Formalno zveznost opredelimo s pomočjo limite funkcije v točki.

**Definicija 3.24.** Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija in naj bo  $a \in D$ . Pravimo, da je funkcija  $f$  zvezna v točki  $a$ , če velja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Če je funkcija zvezna v vsaki točki svoje domene  $D$ , pravimo, da je zvezna na  $D$ .

To pomeni, da se vrednosti funkcije približujejo dejanski vrednosti funkcije v točki  $a$ .

*Primer 3.28.* Funkcija  $f(x) = x^2$  je zvezna v vsaki realni točki. Za poljuben  $a \in \mathbb{R}$  velja:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a).$$

Ker limita obstaja in je enaka funkcijski vrednosti, je funkcija zvezna povsod na  $\mathbb{R}$ .

*Primer 3.29.* Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \neq 2, \\ 5, & x = 2 \end{cases}$$

ni zvezna v točki  $x = 2$ , saj velja:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3 \neq 5 = f(2).$$

Limita obstaja, vendar ni enaka funkcijski vrednosti.

**Leva in desna zveznost**

**Definicija 3.25.** Funkcija  $f$  je *zvezna z leve* v točki  $a$ , če velja:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

**Definicija 3.26.** Funkcija  $f$  je *zvezna z desne* v točki  $a$ , če velja:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

**Trditev 3.6.** Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $a$  natanko tedaj, ko je zvezna z leve in z desne v točki  $a$ .

*Dokaz.* Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a \in D$ .

( $\Rightarrow$ ) Predpostavimo, da je  $f$  zvezna v točki  $a$ . Po definiciji to pomeni

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definicija limite v točki  $a$  pravi, da za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$  tako, da za vse  $x \in D$  velja

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Če sedaj omejimo  $x$  samo na vrednosti  $x < a$ , iz pogoja  $0 < |x - a| < \delta$  sledi

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kar je natanko definicija

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a),$$

torej je  $f$  zvezna z leve v  $a$ .

Podobno, če omejimo  $x$  na vrednosti  $x > a$ , dobimo

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kar pomeni

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a),$$

torej je  $f$  zvezna tudi z desne v  $a$ .

( $\Leftarrow$ ) Obratno, predpostavimo, da je  $f$  zvezna z leve in z desne v točki  $a$ . To pomeni

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Po definiciji leve zveznosti: za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta_1 > 0$  tako, da

$$a - \delta_1 < x < a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Po definiciji desne zveznosti: za isti  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta_2 > 0$  tako, da

$$a < x < a + \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Sedaj vzamemo

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Naj bo  $x \in D$  tak, da  $0 < |x - a| < \delta$ . Potem imamo dve možnosti:

- Če je  $x < a$ , potem iz  $0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1$  sledi  $a - \delta_1 < x < a$ , zato

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Če je  $x > a$ , potem iz  $0 < |x - a| < \delta \leq \delta_2$  sledi  $a < x < a + \delta_2$ , zato

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

V obeh primerih velja

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

kar je po definiciji enakovredno temu, da

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

S tem smo pokazali, da je  $f$  zvezna v točki  $a$ .

Sklenemo, da je  $f$  zvezna v  $a$  natanko tedaj, ko je zvezna z leve in z desne v  $a$ .  $\square$

*Primer 3.30.* Funkcija stopničaste oblike

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

ni zvezna v  $x = 0$ , ker velja:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Funkcija ima skok v točki 0.

### Osnovne lastnosti zveznih funkcij

**Trditev 3.7.** Če sta funkciji  $f$  in  $g$  zvezni v točki  $a$ , potem so v točki  $a$  zvezne tudi funkcije:

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x)g(x), \quad cf(x) \quad (c \in \mathbb{R})$$

in če  $g(a) \neq 0$ , potem tudi

$$\frac{f(x)}{g(x)}.$$

*Dokaz.* Dokažimo, da velja trditev za primer  $f(x) + g(x)$  (dokaz za razliko, produkt, produkt z realnim številom in kvocient dveh funkcije je zelo podoben).

Ker je  $f$  zvezna v točki  $a$ , po definiciji zveznosti velja:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0 \text{ tako, da } 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon_1.$$

Podobno, ker je  $g$  zvezna v točki  $a$ , velja:

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \text{ tako, da } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon_2.$$

Naj bo zdaj  $\varepsilon > 0$  poljuben. Izberemo

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potem obstajata  $\delta_1, \delta_2 > 0$  z zgornjo lastnostjo. Definiramo

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}.$$

Za vsak  $x$  z lastnostjo  $0 < |x - a| < \delta$  tedaj velja hkrati

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sedaj ocenimo:

$$|h(x) - h(a)| = |(f(x) + g(x)) - (f(a) + g(a))| = |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))|$$

in uporabimo trikotniško neenakost:

$$|h(x) - h(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ker smo za poljuben  $\varepsilon > 0$  našli  $\delta > 0$ , tako da iz  $0 < |x - a| < \delta$  sledi  $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$ , smo po definiciji dokazali, da je

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a),$$

torej je funkcija  $h(x) = f(x) + g(x)$  zvezna v točki  $a$ . □

**Trditev 3.8.** Polinomi in racionalne funkcije (tam kjer so definirane) so zvezne.

**Trditev 3.9.** Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija. Če sta  $f$  in  $g$  zvezni, je tudi  $g \circ f$  zvezna.

*Primer 3.31.* Funkcija

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 2}$$

je zvezna na množici  $\{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 2 \geq 0\}$ , ker je kompozitum polinoma in kvadratnega korena, ki sta zvezni funkciji.

**Izrek 3.10** (Izrek o vmesni vrednosti (Bolzanov-Cauchyjevi izrek)). Naj bo  $f$  zvezna funkcija na zaprtem intervalu  $[a, b]$  in naj bo  $f(a) \neq f(b)$ . Če je  $k$  poljubno število med  $f(a)$  in  $f(b)$ , potem obstaja točka  $c \in (a, b)$ , da velja

$$f(c) = k.$$

*Ideja dokaza.* Ker je  $f$  zvezna, ima interval  $[a, b]$  zvezno sliko  $f([a, b])$ . Intervali se pri zveznih preslikavah ne morejo »raztrgati«. S pomočjo supremuma množice  $\{x \in [a, b] : f(x) < k\}$  pokažemo, da obstaja točka  $c$ , kjer je  $f(c) = k$ . □

*Primer 3.32.* Naj bo  $f(x) = x^3 - 5x + 1$ . Iščemo ničlo na intervalu  $[0, 2]$ .

Izračunamo robne vrednosti:

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 8 - 10 + 1 = -1.$$

Ker  $f(0) > 0$  in  $f(2) < 0$ , po izreku o vmesni vrednosti obstaja  $c \in (0, 2)$ , da je  $f(c) = 0$ . Izrek nam ne pove natančne vrednosti ničle, zagotovi pa njen obstoj.

**Izrek 3.11** (Izrek o največji in najmanjši vrednosti). Če je  $f$  zvezna funkcija na zaprtem intervalu  $[a, b]$ , potem  $f$  doseže svojo največjo in najmanjšo vrednost. Obstajata točki  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tako, da velja

$$f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

*Ideja dokaza.* Ker je interval  $[a, b]$  zaprt in omejen v  $\mathbb{R}$ , je po izreku Heine-Borel kompakten. Ker je  $f$  zvezna je tudi slika  $f([a, b])$  kompaktna v  $\mathbb{R}$ . Vsaka kompaktna množica v  $\mathbb{R}$  ima maksimum in minimum.  $\square$

*Primer 3.33.* Naj bo  $f(x) = x^2 - 4x + 5$  na intervalu  $[0, 5]$ .

Funkcija je zvezna povsod, torej tudi na tem intervalu. Odvodom poiščemo stacionarno točko:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Izračunamo vrednosti:

$$f(0) = 5, \quad f(2) = 1, \quad f(5) = 10.$$

Zato:

$$\min_{[0,5]} f = 1 \text{ pri } x = 2, \quad \max_{[0,5]} f = 10 \text{ pri } x = 5.$$

**Izrek 3.12** (Heinejev izrek). Naj bo  $f$  zvezna funkcija na intervalu  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Potem za vsako zaporedje  $(x_n)$  v  $I$ , ki konvergira k točki  $a \in I$ , velja tudi

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

*Povzetek dokaza.* Definicija zveznosti v točki  $a$  pravi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ker iz  $x_n \rightarrow a$  sledi, da obstaja  $N$ , da za vse  $n > N$  velja  $|x_n - a| < \delta$ , sledi tudi  $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ . Torej  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .  $\square$

*Primer 3.34.* Naj bo  $x_n = \frac{1}{n}$  in  $f(x) = \sqrt{x}$ .

Potem  $x_n \rightarrow 0$  in ker je  $f$  zvezna na  $[0, \infty)$ , velja:

$$f(x_n) = \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 = f(0).$$

### Nekatere pomembnejše limite

V nadaljevanju zapišemo nekaj najpogosteje uporabljenih in klasičnih limit, ki se pojavljajo pri analizi funkcij, zveznosti, odvodih in integraciji. Ti rezultati so standardni in jih pogosto uporabljamo pri računanju zahtevnejših limit.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a \quad (a > 0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}, & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} &= a \quad (a \in \mathbb{R}), & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x} &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}, a > 1), \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} &= a \quad (a \in \mathbb{R}), & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) &= \frac{a}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} &= e, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1. & \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= 1. \end{aligned}$$

## 3.4 Realne funkcije v ekonomiji

Realne funkcije predstavljajo eno najosnovnejših matematičnih orodij v ekonomiji. Z njihovo pomočjo opisujemo odnose med ekonomskimi spremenljivkami, modeliramo odločitve potrošnikov in podjetij, analiziramo spremembe stroškov in prihodkov ter raziskujemo ravnotežja na trgih. Ekonomija je kot znanost pogosto formulirana v jeziku funkcij, saj te omogočajo natančno opisovanje odvisnosti med veličinami, ki jih je sicer težko analizirati brez formalnih metod.

Matematične funkcije v ekonomiji obravnavamo kot preslikave oblike

$$f : D \rightarrow \mathbb{R},$$

kjer elementom  $x$  (npr. količina, cena, dohodek, kapital, obrestna mera) priredimo vrednost  $f(x)$  (npr. strošek, korist, povpraševanje, donos, produktivnost).

V nadaljevanju predstavimo nekaj najpogostejših tipov funkcij, ki se pojavljajo v ekonomskih modelih, ter njihov pomen.

### 1. Povpraševanje in ponudba

*Primer 3.35.* Naj bo povpraševanje podano s funkcijo

$$Q_D(p) = a - bp, \quad a, b > 0,$$

kjer je  $p$  cena,  $Q_D$  pa količina, ki jo potrošniki želijo kupiti. Gre za padajočo funkcijo, ki izraža *zakon povpraševanja*: višja cena pomeni manjše povpraševanje.

Podobno je ponudba pogosto naraščajoča funkcija cene:

$$Q_S(p) = c + dp, \quad d > 0.$$

Tržno ravnotežje je rešitev enačbe

$$Q_D(p^*) = Q_S(p^*).$$

### 2. Stroškovne funkcije

*Primer 3.36.* Skupni stroški (total cost) so pogosto opisani s funkcijo

$$C(q) = F + cq + dq^2, \quad d > 0,$$

kjer je  $q$  obseg proizvodnje,  $F$  fiksni stroški,  $cq + dq^2$  pa variabilni stroški.

Mejni stroški (marginal cost) so odvod skupnih stroškov:

$$MC(q) = C'(q) = c + 2dq.$$

Funkcija je pomembna pri odločanju podjetja, saj podjetje maksimira dobiček, kadar velja

$$MC(q) = MR(q),$$

kjer je  $MR(q)$  mejni prihodek.

### 3. Produkcijske funkcije

*Primer 3.37.* Eden najpogostejših modelov v ekonomiji je Cobb-Douglasova produkcijska funkcija:

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad A > 0, \alpha, \beta > 0,$$

kjer  $K$  predstavlja kapital,  $L$  delo,  $Y$  pa izhod (proizvodnjo).

Lastnosti funkcije:

- pozitivna in naraščajoča v obeh spremenljivkah,
- homogenost stopnje  $\alpha + \beta$ ,
- mejni produkti:

$$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta, \quad MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}.$$

#### 4. Koristnost in indifferenčne krivulje

*Primer 3.38.* Koristnost potrošnika lahko zapišemo kot funkcijo dveh dobrin:

$$U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Za dano raven koristnosti  $U_0$  je indifferenčna krivulja množica

$$\{(x, y) : U(x, y) = U_0\}.$$

Mejna stopnja substitucije (MRS) je

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{y}{x}.$$

Indifferenčne krivulje so padajoče in konveksne, kar odraža padajočo mejno korist.

#### 5. Diskontiranje in finančne funkcije

*Primer 3.39.* Sedanja vrednost prihodnjega zneska  $F$  po obrestni meri  $r$  in času  $t$  je dana z

$$PV = \frac{F}{(1+r)^t}.$$

Pri neprekinjenem obrestovanju uporabimo funkcijo

$$PV = Fe^{-rt}.$$

Analiza diskontiranja je ključna v investicijski analizi, vrednotenju projektov, obveznic in drugih finančnih instrumentov.

### Naloge

1. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 5x + 1).$$

2. Izračunajte limito racionalne funkcije:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

3. Izračunajte limito z absolutno vrednostjo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Ali limita obstaja?

4. Izračunajte enostranski limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{|x-1|}.$$

5. Izračunajte limito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3}{2x^2 + 7}.$$

6. Uporabite stisnjeni izrek (Sandwich theorem) za izračun:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

7. Izračunajte limito z uporabo algebrskih preoblikovanj:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

8. Poiščite limito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x).$$

9. Izračunajte limito trigonometrične funkcije:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}.$$

10. Izračunajte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$



# Poglavje 4

## Zaporedja

### Uvod

V matematični analizi predstavljajo zaporedja enega najosnovnejših objektov, saj opisujejo obnašanje funkcij na množici naravnih števil. Pri zaporedjih nas najpogosteje zanima, kako se njihovi členi obnašajo, ko indeks  $n$  narašča, ali se vrednosti stabilizirajo, približujejo nekemu realnemu številu ali pa se povsem oddaljujejo.

V tem poglavju uvedemo osnovne pojme, tehnike raziskovanja ter ključne izreke, ki nam omogočajo analizo zaporedij.

### 4.1 Osnovna definicija

**Definicija 4.1.** Zaporedje realnih števil je preslikava

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Element  $a_n$  imenujemo *n-ti člen zaporedja*. Zaporedje zapisujemo kot  $(a_n)$  ali  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Zaporedje lahko podamo na več načinov. Med najpogostejšimi sta:

- **eksplicitno:** člen  $a_n$  je podan s formulo, npr.  $a_n = \frac{1}{n}$  in
- **rekurzivno:** dana je vrednost prvega elementa zaporedja in pravilo, npr.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

*Primer 4.1.*

1. Zaporedje  $a_n = \frac{1}{2^n}$  je eksplicitno dano:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

2. Zaporedje  $b_n = (-1)^n$  ni konvergentno, vendar je pomemben primer *alternirajočih* zaporedij.
3. Fibonaccijevo zaporedje:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

## 4.2 Omejenost zaporedja

**Definicija 4.2.** Zaporedje  $(a_n)$  je

- *navzgor omejeno*, če obstaja  $M \in \mathbb{R}$ , da je  $a_n \leq M$  za vse  $n$ ,
- *navzdol omejeno*, če obstaja  $m \in \mathbb{R}$ , da je  $a_n \geq m$  za vse  $n$ ,
- *omejeno*, če je omejeno navzgor in navzdol.

*Primer 4.2.*

1. Zaporedje  $a_n = \frac{1}{n}$  je omejeno z  $0 < a_n \leq 1$ .
2. Zaporedje  $(-1)^n$  je omejeno, saj  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ .
3. Zaporedja  $(2^n)$  in  $((-2)^n)$  nista omejena.

Navzgor omejeno zaporedje  $(a_n)$  ima zaradi lastnosti kontinuuma realnih števil svojo natančno zgornjo mejo, to je  $M = \sup a_n$ . Podobno ima navzdol omejeno zaporedje  $(b_n)$  natančno spodnjo mejo  $m = \inf b_n$ .

Natančna zgornja oziroma natančna spodnja meja zaporedja je lahko dejansko tudi član zaporedja, lahko pa se zgornje oziroma spodnje meje zaporedje nikoli ne doseže.

Natančno zgornjo mejo zaporedja lahko podamo tudi na drug način. Velja namreč:  $M = \sup a_n$  natanko tedaj, ko so vsi členi zaporedja manjši ali enaki  $M$ , hkrati pa za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja indeks  $n_0$ , za katerega velja  $a_{n_0} > M - \varepsilon$ . V vsaki  $\varepsilon$ -okolici števila  $M$  se mora torej nahajati vsaj en člen zaporedja.

Če  $M$  ni med členi zaporedja, iz tega sledi še, da je v vsaki njegovi  $\varepsilon$ -okolici celo neskončno mnogo členov. To nas pripelje do pojma stekališča.

## 4.3 Stekališča zaporedja

Omejeno zaporedje lahko vsebuje točke, v katerih se njegovi členi "kopičijo".

**Definicija 4.3.** Število  $L \in \mathbb{R}$  je *stekališče* zaporedja  $(a_n)$ , če je v vsaki okolici  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  neskončno mnogo členov zaporedja.

*Primer 4.3.* Zaporedje

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \dots$$

ima stekališči 1 in 0.

**Izrek 4.1.** Če ima zaporedje več kot eno stekališče, ni konvergentno.

*Dokaz.* Če bi zaporedje imelo limito  $a$ , bi bili vsi dovolj pozni členi v poljubno majhni okolici  $a$ . Tako bi bila edina možna stekališča ravno  $a$ , kar pa nasprotuje predpostavki.  $\square$

**Izrek 4.2.** Vsako omejeno zaporedje, bodisi navzgor bodisi navzdol omejeno, ima vsaj eno stekališče.

*Dokaz.* Naj bo  $m = \inf a_n$  in  $M = \sup a_n$ . Definirajmo množico

$$A = \{x \in \mathbb{R} ; a_n < x \text{ za največ končno mnogo indeksov } n\}.$$

Množica  $A$  je neprazna, saj  $m \in A$ . Poleg tega je  $A$  zgoraj omejena, saj za vsak  $x \in A$  velja  $x < M$ . Zato ima množica  $A$  natančno zgornjo mejo, ki jo označimo z  $a = \sup A$ .

Vzemimo poljuden  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $a = \sup A$ , velja  $a - \varepsilon \in A$ , kar pomeni, da je levo od števila  $a - \varepsilon$  največ končno mnogo členov zaporedja. Po drugi strani pa  $a + \varepsilon \notin A$ , zato je levo od števila  $a + \varepsilon$  neskončno mnogo členov zaporedja. Ker je le končno mnogo členov manjši od  $a - \varepsilon$ , mora biti na intervalu  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  neskončno mnogo členov zaporedja.

Ker je to res za vsak  $\varepsilon > 0$ , je v vsaki okolici  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  prisotnih neskončno mnogo členov, zato je  $a$  stekališče zaporedja  $(a_n)$ .  $\square$

## 4.4 Konvergenca zaporedja

**Definicija 4.4.** Rečemo, da zaporedje  $(a_n)$  konvergira k številu  $a$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $n_0$ , da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za vse } n \geq n_0.$$

Zapisujemo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a_n \rightarrow a.$$

Zaporedje, ki ne konvergira, je *divergentno*.

*Primer 4.4.*

1.  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

2.  $b_n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ , saj

$$\left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

3. Alternirajoče zaporedje  $(-1)^n$  nima limite.

**Izrek 4.3.** Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

*Dokaz.* Če  $a_n \rightarrow a$ , so vsi dovolj pozni členi v okolici  $(a - 1, a + 1)$ , začetni členi pa so končno mnogi, zato dobimo končno zgornjo in spodnjo mejo.  $\square$

Očitno je limita konvergentnega zaporedja hkrati tudi njegovo stekališče in pravzaprav edino stekališče takšnega zaporedja. Obratno pa ne velja: če ima zaporedje več kot eno stekališče, ne more biti konvergentno, saj v tem primeru nobeno izmed stekališč ne izpolnjuje pogojev za limito.

Člene konvergentnega zaporedja lahko razumemo kot zaporedje zaporednih približkov za število  $a$ . Razlika  $|a - a_n|$  predstavlja napako, ki jo naredimo, če namesto prave vrednosti  $a$  uporabimo  $n$ -ti člen zaporedja. Če zaporedje konvergira k  $a$ , lahko napako naredimo poljubno majhno: za vsak vnaprej izbran  $\varepsilon > 0$  lahko izberemo dovolj velik indeks  $n$ , da bo  $|a - a_n| < \varepsilon$ . To pomeni, da se z dovolj pozno izbranimi členi zaporedja približamo limiti tako natančno, kot želimo.

**Izrek 4.4.** Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima natanko eno stekališče.

*Dokaz.* Dovolj je dokazati, da je vsako omejeno zaporedje, ki ima samo eno stekališče, tudi konvergentno. Drugače povedano: pokazati moramo, da ima vsako omejeno divergentno zaporedje nujno vsaj dve stekališči.

Naj bo  $(a_n)$  omejeno, vendar divergentno. Ker je omejeno, obstaja interval  $[m, M]$ , v katerem leži množica vseh členov zaporedja. Po izreku 4.2 ima zaporedje ima vsaj eno stekališče. Zaporedje označimo z  $a_n$ .

Ker zaporedje ni konvergentno, število  $a$  ne more biti njegova limita, kar pomeni, da se za poljubno majhen  $\varepsilon > 0$  zunaj intervala  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  še vedno pojavlja neskončno mnogo členov zaporedja. To pa presega zgolj končno množico členov, ki so morda manjši od  $a - \varepsilon$ , in zato mora biti na enem izmed intervalov  $[m, a - \varepsilon]$  ali  $[a + \varepsilon, M]$  neskončno mnogih členov. Tak interval vsebuje drugo stekališče  $b \neq a$ .

Torej ima omejeno divergentno zaporedje vedno vsaj dve stekališči. Če pa ima omejeno zaporedje samo eno stekališče, sledi, da je konvergentno.  $\square$

Naslednji kriterij za konvergenco je posebej uporaben, ker govori le o členih zaporedja, ne pa o njegovi limiti. Z njegovo pomočjo lahko določimo, ali je zaporedje konvergentno, četudi ne poznamo vrednosti, h kateri bi se potencialno približevalo.

**Izrek 4.5.** Zaporedje  $(a_n)$  je konvergentno natanko tedaj, ko izpolnjuje t. i. Cauchyjev pogoj:

za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja indeks  $n_0$ , tako da za vse  $n > n_0$  in za vsak  $p \in \mathbb{N}$  velja

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon. \quad (4.1)$$

*Dokaz.* Najprej prikažimo, da je Cauchyjev pogoj nujen pogoj za konvergenco. Naj bo  $(a_n)$  zaporedje, ki konvergira k limiti  $a$ , ter naj bo  $\varepsilon > 0$  poljubno. Ker zaporedje

konvergira, obstaja  $n_0$ , da je  $|a_n - a| < \varepsilon/2$  za vse  $n > n_0$ . Za vsak  $p \in \mathbb{N}$  je tudi  $n + p > n_0$ , zato velja

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) - (a - a_n)| \leq |a_{n+p} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tako vidimo, da vsako konvergentno zaporedje izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

Sedaj dokažimo še obratno, tj. da je Cauchyjev pogoj tudi zadosten pogoj za konvergenco. Naj bo  $(a_n)$  zaporedje, ki ustreza pogoju (4.1). Izberimo  $\varepsilon = 1$  in dobljeni  $n_0$  ter razmislimo o množici

$$\{a_r ; r > n_0\}.$$

Ker so razlike  $|a_{r+p} - a_r| < 1$ , so vsi dovolj pozni členi omejeni in zato zaporedje  $(a_n)$  od nekega mesta dalje leži v nekem končnem intervalu. Po izreku 4.2 ima taka množica vsaj eno stekališče.

Ostane še, da pokažemo, da ima zaporedje največ eno stekališče. To pa sledi iz Cauchyjevega pogoja, saj dovoljuje, da so vsi dovolj pozni členi med seboj poljubno blizu. Zato se zaporedje nujno približuje eni sami točki, ki je njegova limita.

□

#### 4.4.1 Algebra konvergentnih zaporedij

**Izrek 4.6.** Naj bosta  $(a_n)$  in  $(b_n)$  konvergentni zaporedji. Če velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

potem so konvergentna tudi zaporedja  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$  in  $(a_n b_n)$  ter velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

*Dokaz.* Dokažimo prvo enakost. Naj bo  $\varepsilon > 0$  poljubno majhno število.

Ker  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , obstaja indeks  $n_1 \in \mathbb{N}$ , da za vse  $n \geq n_1$  velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ker  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , obstaja indeks  $n_2 \in \mathbb{N}$ , da za vse  $n \geq n_2$  velja

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vzemimo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Tedaj za vsak  $n \geq n_0$  hkrati velja obe neenačbi, zato

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo po definiciji limite pokazali, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

□

**Izrek 4.7.** Naj velja

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

pri čemer je  $\lim a_n = \lim b_n = L$ . Tedaj je  $\lim c_n = L$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\varepsilon > 0$  poljubno majhno število. Ker  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , obstaja indeks  $n_1$ , da za vse  $n \geq n_1$  velja

$$|a_n - L| < \varepsilon,$$

kar je ekvivalentno

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon.$$

Podobno iz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  sledi, da obstaja indeks  $n_2$ , da za vse  $n \geq n_2$  velja

$$L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon.$$

Vzemimo  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Tedaj za vsak  $n \geq n_0$  hkrati velja

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon.$$

Od tod sledi

$$|c_n - L| < \varepsilon \quad \text{za vse } n \geq n_0.$$

Po definiciji limite to pomeni, da zaporedje  $(c_n)$  konvergira k  $L$ , torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

□

**Izrek 4.8.** Naj bo  $(a_n)$  zaporedje, pri katerem za vsak  $n$  velja  $a_n \neq 0$ . Če je zaporedje  $(a_n)$  konvergentno in je njegova limita  $a \neq 0$ , potem konvergira tudi zaporedje  $(1/a_n)$  in sicer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Izberimo pozitivno število  $\eta$ , ki je hkrati manjše od  $|a|/2$  in od  $\varepsilon|a|^2/2$ . Ker  $a_n \rightarrow a$ , obstaja indeks  $n_0$ , da za vse  $n \geq n_0$  velja

$$|a_n - a| < \eta.$$

Za tak  $n$  je

$$|a_n| = |a + (a_n - a)| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2},$$

torej so vsi dovolj pozni členi  $a_n$  po absolutni vrednosti večji od  $|a|/2$ .

Sedaj ocenimo razliko med inverzoma:

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n a|} < \frac{\eta}{(|a|/2)|a|} = \frac{2\eta}{|a|^2}.$$

Ker smo izbrali  $\eta < \varepsilon|a|^2/2$ , sledi

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| < \varepsilon \quad \text{za vse } n \geq n_0.$$

Po definiciji limite to pomeni, da zaporedje  $(1/a_n)$  konvergira proti  $1/a$ . □

**Izrek 4.9.** Naj bosta  $(a_n)$  in  $(b_n)$  konvergentni zaporedji, pri čemer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0,$$

in naj za vsak  $n$  velja  $b_n \neq 0$ . Tedaj je zaporedje kvocientov  $(a_n/b_n)$  konvergentno in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

## 4.5 Divergentna zaporedja

Zaporedje, ki ne konvergira, imenujemo *divergentno*. Med takšna zaporedja spada vsak primer neomejenega zaporedja, pa tudi vsako zaporedje, ki ima več kot eno stekališče. Če vrednosti zaporedja naraščajo brez meja, pravimo, da zaporedje *divergira proti*  $+\infty$ , če pa padajo brez omejitve navzdol, rečemo, da *divergira proti*  $-\infty$ .

**Definicija 4.5.** Naj bo  $(a_n)$  zaporedje. Če za vsako realno število  $M > 0$  obstaja indeks  $n_0$ , tako da za vse  $n \geq n_0$  velja

$$a_n > M,$$

pravimo, da zaporedje *divergira proti neskončnosti* in zapišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Podobno rečemo, da zaporedje divergira proti  $-\infty$ , če za vsak  $A > 0$  obstaja  $n_0$ , da za vse  $n \geq n_0$  velja

$$a_n < -A,$$

kar izrazimo z zapisom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Zaporedje, ki divergira proti  $\infty$  ali  $-\infty$ , nima stekališč, saj se njegovi členi oddaljujejo od vsake končne točke. Pri tem pa ni nujno, da vsako divergentno zaporedje divergira prav proti neskončnosti; lahko je divergentno tudi zaradi osciliranja ali drugih oblik neurejenega obnašanja.

*Primer 4.5.* Nekaj tipičnih primerov divergentnih zaporedij:

1. Zaporedje  $a_n = n$  divergira proti  $+\infty$ . Za dano  $M > 0$  lahko vzamemo  $n_0 = \lfloor M \rfloor + 1$ .
2. Zaporedje  $a_n = \log(n)$  prav tako divergira proti  $+\infty$ . Za dano  $M > 0$  izberemo  $n_0 = \lfloor e^M \rfloor + 1$ .
3. Zaporedje  $a_n = \sin(n)$  je divergentno, čeprav je omejeno; vendar zaradi osciliranja nima limite.

## 4.6 Monotona zaporedja

**Definicija 4.6.** Zaporedje  $(a_n)$  imenujemo *naraščajoče*, če za vsak  $n \in \mathbb{N}$  velja

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

Če velja strožja neenakost  $a_n < a_{n+1}$ , govorimo o *strogo naraščajočem* zaporedju.

Analogno je zaporedje *padajoče*, kadar za vse  $n$  velja

$$a_n \geq a_{n+1},$$

in *strogo padajoče*, kadar velja  $a_n > a_{n+1}$ . Zaporedje je *monotono*, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče.

Monotona zaporedja so vedno vsaj enostransko omejena. Naraščajoče zaporedje je navzdol omejeno, saj je

$$\inf a_n = a_1,$$

padajoče pa je navzgor omejeno, ker je

$$\sup b_n = b_1.$$

Poleg teh osnovnih lastnosti velja pomemben rezultat:

**Izrek 4.10.** Naj bo  $(a_n)$  naraščajoče zaporedje.

1. Če je navzgor omejeno, konvergira in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n.$$

2. Če ni navzgor omejeno, potem zaporedje divergira proti  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Podobno: padajoče zaporedje, ki je navzdol omejeno, konvergira proti

$$\inf a_n,$$

če pa ni navzdol omejeno, divergira proti  $-\infty$ .

*Dokaz.* Vzemimo najprej naraščajoče zaporedje  $(a_n)$ , ki je navzgor omejeno, in naj bo  $M = \sup a_n$ . Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Ker je  $M$  natančna zgornja meja zaporedja, obstaja indeks  $k$ , da je

$$a_k > M - \varepsilon.$$

Ker je zaporedje naraščajoče, velja za vsak  $n \geq k$

$$a_n \geq a_k > M - \varepsilon.$$

Hkrati je  $a_n \leq M$  za vse  $n$ , zato so vsi dovolj pozni členi v intervalu

$$(M - \varepsilon, M].$$

Sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M.$$

Če zaporedje ni navzgor omejeno, ima za vsak  $A > 0$  nek člen  $a_{n_0} > A$ . Ker je zaporedje naraščajoče, so vsi poznejši členi še večji, torej  $a_n > A$  za vsak  $n \geq n_0$ . To velja za vsak poljuben  $A$ , zato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Dokaz za padajoča zaporedja je popolnoma analogen. □

## 4.7 Značilne limite zaporedij

V nadaljevanju predstavimo nekaj najpogosteje uporabljenih zaporedij, pri katerih lahko limito določimo bodisi neposredno iz definicije konvergence bodisi z uporabo prej dokazanih izrekov. Primeri, ki sledijo, so temeljni pri analizi funkcij in številskih vrst.

*Primer 4.6* (Harmonični približki ničle). Eno najosnovnejših zaporedij je  $a_n = \frac{1}{n}$ . Iz lastnosti monotonega padajočega zaporedja, ki je navzdol omejeno z 0, sledi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

*Primer 4.7.* Razmislimo o zaporedju

$$a_n = \frac{n}{n+1}.$$

Enostavno preoblikovanje da

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

kar takoj pokaže, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - 0 = 1.$$

*Primer 4.8* (Alternirajoče zaporedje). Zaporedje

$$a_n = (-1)^n$$

ima dve stekališči, 1 in  $-1$ , zato ne more biti konvergentno. Gre za tipičen primer omejenega, vendar divergentnega zaporedja.

*Primer 4.9.* Obravnavajmo zaporedje

$$a_n = \sqrt[n]{n} = n^{1/n}.$$

Z uporabo logaritma zapišimo

$$\ln a_n = \frac{\ln n}{n}.$$

Ker je  $\ln n$  rast počasnejša od linearne, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

zato po zveznosti eksponentne funkcije sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = e^0 = 1.$$

*Primer 4.10* (Zaporedje potenčnih približkov). Za realno število  $c$  analiziramo potence

$$a_n = c^n.$$

Velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \begin{cases} 0, & |c| < 1, \\ 1, & c = 1, \\ +\infty, & c > 1, \\ \text{ne konvergira,} & c \leq -1. \end{cases}$$

To je ena najpomembnejših klasifikacij pri delu z geometrijskimi zaporedji.

*Primer 4.11.* Znani zaporedji

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

sta monotoni (prvo narašča, drugo pada) in omejeni. Obe konvergirata k istemu številu  $e \approx 2,71828$ , torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Zaporedje je pomembno zaradi vloge pri definiciji eksponentne funkcije.

*Primer 4.12* (Zaporedje kvadratnih približkov). Vzemimo

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Preoblikujmo:

$$a_n = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n.$$

Ker  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ , sledi

$$a_n \sim e^n \rightarrow +\infty.$$

To je tipičen primer zaporedja, ki zaradi »prehitre« rasti eksponenta divergira.

Primer 4.13. Zaporedje

$$a_n = \log n$$

se počasi, a neomejeno dviga. Zato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty.$$

Gre za klasičen primer divergentnega, a omejeno naraščajočega zaporedja.

## 4.8 Zaporedja v ekonomiji

Zaporedja imajo v ekonomiji osrednjo vlogo, saj mnoge ekonomske količine nastopajo kot časovne vrste, torej kot zaporedje vrednosti, ki se spreminjajo iz obdobja v obdobje. Spremljanje dinamike gospodarske aktivnosti, finančnih tokov ali demografskih gibanj je skoraj vedno povezano z zaporedji, katerih lastnosti določajo, kako se proces razvija, stabilizira ali odmika iz ravnotežja. V tem razdelku pokažemo, kako se matematični pojmi konvergence, monotonosti in rekurzivnosti neposredno povezujejo z ekonomskimi interpretacijami.

### 1. Rast in dinamika gospodarskih spremenljivk

Števila, ki predstavljajo bruto domači proizvod, proizvodnjo, zaposlenost, ponudbo, povpraševanje ali cene, spremljamo kot zaporedja letnih, četrletnih ali mesečnih vrednosti. Matematične lastnosti zaporedij omogočajo natančno analizo trenda in sprememb v gospodarstvu.

- **Monotonost:** Če zaporedje  $(x_n)$  predstavlja npr. raven proizvodnje, je naraščajoče zaporedje znak rasti, padajoče pa upada. Stroga monotonost pomeni stalno izboljševanje ali slabšanje procesov.
- **Omejenost:** Mnoge ekonomske spremenljivke imajo naravne, tehnološke ali institucionalne meje. Če je zaporedje navzgor omejeno, to pomeni, da sistem ne more preseči določene ravni zmogljivosti ali povpraševanja.
- **Konvergenca:** Če zaporedje  $(x_n)$  konvergira, npr.  $x_n \rightarrow L$ , lahko ekonomsko rečemo, da se proces stabilizira pri ravnotežni vrednosti  $L$ . Divergenca po drugi strani kaže na to, da se sistem oddaljuje od ravnotežja.

Če je gospodarska spremenljivka opisana z naraščajočim in navzgor omejenim zaporedjem, velja po izreku o monotoni konvergenci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n,$$

kar pomeni, da dolgoročno doseže najvišjo možno raven. Ta rezultat je osnova mnogih makroekonomskih modelov stabilne rasti.

## 2. Obrestovanje in akumulacija kapitala

Ena najpogostejših matematičnih struktur v ekonomiji je geometrijsko zaporedje, saj opisuje obrestno-obrestni račun. Če na začetku vložimo kapital  $K_0$  in je obrestna mera  $r$ , je stanje kapitala po  $n$  obdobjih

$$K_n = K_0(1+r)^n,$$

kar je geometrijsko zaporedje s členom  $(1+r)^n$ .

- **Eksponentna rast:** Ker  $(1+r)^n$  raste eksponentno, se pri pozitivni obrestni meri kapital povečuje vedno hitreje.
- **Anuitete:** Pri odplačevanju posojil se pojavijo zaporedja enakih plačil. Njihova vsota

$$A = c + c(1+r)^{-1} + c(1+r)^{-2} + \dots$$

vodi k geometrijski vrsti, ki omogoča izpeljavo anuitetnih enačb.

Odločilna je lastnost geometrijskega zaporedja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+r)^{-n} = 0 \quad (r > 0),$$

kar pomeni, da se vpliv zelo oddaljenih plačil sčasoma zanemari. Ta limitni proces je ključen za diskontiranje v finančni matematiki.

## 3. Stroški, prihodki in dobički kot zaporedja

Podjetja pogosto spremljajo svoje poslovanje prek zaporedij mesečnih ali letnih rezultatov. S tem analizirajo:

- **trend** - dolgoročno smer gibanja,
- **cikličnost** - nihanja zaradi ekonomskega cikla,
- **sezonskost** - ponavljajoča se kratkoročna gibanja.

Če denimo zaporedje  $(P_n)$  predstavlja dobiček podjetja, nas zanima:

- ali je  $(P_n)$  naraščajoče ali padajoče,
- ali obstaja limita (stabilno poslovanje),
- ali zaporedje oscilira (nestabilno poslovanje),
- kako hitro se približuje ravnotežni vrednosti.

Če velja

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \rightarrow g,$$

potem  $g$  predstavlja *asimptotično stopnjo rasti*. Poznavanje te stopnje je temelj ekonomskih napovednih modelov (ARIMA, eksponentno glajenje, trendni modeli).

#### 4. Optimizacija in iterativni ekonomski modeli

Mnogi optimizacijski postopki so naravno podani z rekurzivnimi zaporedji, kjer vsako novo stanje temelji na prejšnjem. To vključuje:

- postopno izboljševanje proizvodnih procesov,
- iterativno nastavljanje cen,
- učne algoritme v ekonomiji (npr. prilagajanje pričakovanj).

Takšna zaporedja imajo tipično obliko

$$x_{n+1} = F(x_n),$$

kjer funkcija  $F$  opisuje način prilagajanja.

Ekonomski modeli stabilnega ravnotežja pogosto zahtevajo, da zaporedje konvergira k fiksni točki:

$$x^* = F(x^*).$$

Pogoji za konvergenco rekurzivnih zaporedij (Lipschitzeva kontrakcija, monotona konvergenca) imajo zato neposredne ekonomske implikacije.

#### 5. Napovedovanje in ekonomsko modeliranje

Velik del ekonometrije temelji na obravnavi podatkov kot zaporedij. Da lahko razumemo bolj zapletene modele (na primer avtoregresivne procese), moramo najprej razumeti osnovne lastnosti zaporedij.

Ključna vprašanja vključujejo:

- kaj pomeni, da zaporedje konvergira,
- kako določimo dolgoročno vrednost procesa,
- kako interpretiramo stopnjo rasti

$$g_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n},$$

- kaj pomeni, da zaporedje oscilira ali stabilizira,
- kako ločimo trend od ciklov in šuma.

Pri napovedovanju je pomembno, ali velja

$$x_{n+1} - x_n \rightarrow 0.$$

Če je razlika med zaporednima opazovanji v dolgoročnem smislu majhna, lahko domnevamo, da proces prehaja v stabilno fazo, kar je osnova za linearizacijo ekonomskih modelov in ocenjevanje dolgoročnih ravnotežij.

## 6. Markovske verige kot posebni primer zaporedij

Med pomembne primere zaporedij, ki se pojavljajo v ekonomiji, sodijo tudi *markovske verige*. Gre za stohastične procese, pri katerih se sistem v diskretnih časovnih korakih premika med različnimi stanji, pri čemer je porazdelitev stanja v trenutku  $n + 1$  odvisna le od stanja v trenutku  $n$ . Zaporedje vektorjev

$$p_0, p_1, p_2, \dots$$

predstavlja zaporedje verjetnostnih porazdelitev, ki opisujejo razvoj sistema skozi čas.

Markovske verige se v ekonomiji pojavljajo pri modeliranju:

- gibanja zaposlenosti med različnimi tipi delovnih razmerij,
- bonitetnih razredov podjetij in držav,
- verjetnosti prehoda podjetja med fazami rasti, stabilnosti in krčenja,
- vedenjskih odločitev potrošnikov ali vlagateljev,
- dolgoročnih ravnotežij v makroekonomskih modelih.

Ključno vprašanje je pogosto, ali zaporedje porazdelitev ( $p_n$ ) konvergira k stacionarni porazdelitvi. To je neposredna uporaba teorije konvergence zaporedij: če obstaja limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^*,$$

potem stacionarno stanje  $p^*$  opisuje dolgoročno obnašanje gospodarstva ali finančnega sistema. Markovske verige tako predstavljajo pomembno povezavo med teorijo zaporedij in analizo dinamičnih ekonomskih procesov.

## Naloge

1. Določi, ali zaporedje  $a_n = \frac{3n - 5}{2n + 1}$  konvergira in izračunaj njegovo limito.
2. Preveri, ali je zaporedje  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  konvergentno. Če ni, utemelji, zakaj ne.
3. Izračunaj  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 5}}$ .
4. Uporabi izrek 4.7. "o vpetem zaporedju" in izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left( \frac{1}{n} \right).$$

5. Ali zaporedje  $a_n = \sqrt[n]{2}$  konvergira? Če da, izračunaj limito.

6. Določi, ali zaporedje  $a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$  narašča, pada ali ni monotono.
7. Naj bo  $a_1 = 2$  in  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ . Pokaži, da je zaporedje padajoče in poišči njegovo limito.
8. Dokaži, da zaporedje  $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$  divergira in določi, kam divergira.
9. Izračunaj limito zaporedja

$$a_n = \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n .$$

10. Preveri, ali zaporedje  $a_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  konvergira.

11. Za zaporedje  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$  določi:

- (a) ali je omejeno,  
 (b) ali je monotono,  
 (c) ali ima stekališče in katero.

12. Določi limito zaporedja

$$a_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} .$$

13. Uporabi lastnosti logaritma in izračunaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} .$$

14. Preveri, ali zaporedje  $a_n = \sin \left( \frac{n\pi}{3} \right)$  konvergira ali ima več stekališč.

15. Naj bo zaporedje  $(a_n)$  dano z

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{a_n + 3} .$$

Ugotovi, ali je zaporedje monotono in ali konvergira. Če konvergira, določi limito.



# Poglavje 5

## Vrste

### Uvod

V matematični analizi so vrste naravna nadgradnja zaporedij, saj nas ne zanima več samo obnašanje posameznih členov, temveč vsota naraščajočega števila členov. Vrste omogočajo opis in analizo številnih pojavov v matematiki in naravoslovju - od razvoja funkcij v potenčne vrste, aproksimacij in numeričnih metod do modeliranja fizikalnih procesov, signalov in verjetnostnih porazdelitev.

Pri vrstah nas najpogosteje zanima, ali zaporedje delnih vsot konvergira ali divergira, kako hitro približujejo vsoto ter pod kakšnimi pogoji lahko vrste odvajamo, integriramo ali uporabimo za aproksimacijo funkcij. Še posebej pomembne so potenčne vrste in Taylorjeve vrste, ki so osnovno orodje za lokalne predstavitve funkcij.

Zgodovinsko gledano segajo začetki teorije vrst v 17. stoletje, ko sta Newton in Leibniz pri razvoju infinitezimalnega računa odkrila prve primerne računske vrste. Euler je v 18. stoletju teorijo obogatil s sistematičnimi metodami za preverjanje konvergence in s prvimi slovitimi rezultati, kot je vsota recipročnih kvadratov. Kasneje so Fourier, Cauchy, Abel in drugi postavili temelje sodobne teorije konvergence ter razvili analitične pristope, ki jih uporabljamo še danes.

V tem poglavju uvedemo osnovne pojme številskih in funkcijskih vrst, spoznamo kriterije za konvergenco ter obravnavamo najpomembnejše primere, ki tvorijo temelj nadaljnjih poglavij o potenčnih in Taylorjevih vrstah.

## 5.1 Številске vrste

**Definicija 5.1.** Naj bo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zaporedje realnih števil. *Številska vrsta* je formalni zapis

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Za vsak  $N \in \mathbb{N}$  definiramo *delno vsoto*

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Pravimo, da vrsta *konvergira*, če zaporedje delnih vsot  $(s_N)$  konvergira kot zaporedje realnih števil. V tem primeru napišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N.$$

Če zaporedje  $(s_N)$  divergira, pravimo, da je vrsta divergentna.

Vsaka številska vrsta je tako v prvi vrsti vprašanje o obnašanju zaporedja njenih delnih vsot.

**Izrek 5.1.** Naj bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dana vrsta. Vrsta je konvergentna natanko takrat, kadar za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja tak indeks  $n_0$ , da za vse  $n > n_0$  in vsak  $p \in \mathbb{N}$  velja

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Če je vrsta konvergentna, lahko izračunamo njeno vsoto poljubno natančno, če le seštejemo dovolj njenih začetnih členov - vsota preostalih neskončno mnogo členov bo manjša od predpisane napake.

**Trditev 5.2.** Če vrsta  $\sum a_n$  konvergira, potem nujno velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

*Opomba 8.* Obrat ne drži: obstajajo vrste, pri katerih

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

vendar vrsta kljub temu divergira; primer je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

*Primer 5.1.* Preuči konvergenco geometrijske vrste

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots .$$

Izračunajmo  $n$ -to delno vsoto  $S_n$ :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Pomnožimo enačbo s  $q$  in odštejmo izraza:

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}, \\ qS_n &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n. \end{aligned}$$

Dobimo:

$$S_n - qS_n = a - aq^n,$$

zato

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Delna vsota  $S_n$  konvergira natanko tedaj, ko obstaja  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ . To se zgodi, če in samo če  $|q| < 1$ , saj je takrat  $q^n \rightarrow 0$ .

Torej za  $|q| < 1$  velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1 - q}.$$

*Primer 5.2.* Preuči konvergenco vrste

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots .$$

Zapišimo delne vsote:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$

in tako dalje.

Dobimo zaporedje delnih vsot

$$(S_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots,$$

ki očitno *ni konvergentno*, saj nima limite - vrednosti členov zaporedja se nenehno izmenjujejo (oscilirajo) med vrednostima 1 in 0.

Zato dana vrsta *divergira*.

### 5.1.1 Vrste s pozitivnimi členi

Če so vsi členi zaporedja  $a_n$  pozitivni, tj.  $a_n > 0$  za vsak  $n$ , potem je zaporedje delnih vsot

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

naraščajoče. Takšno zaporedje je torej konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Če takšne omejenosti ni, delne vsote rastejo neomejeno in vrsta divergira proti  $\infty$ .

Primer 5.3. Naj bo  $p > 1$ . Pokazali bomo, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergentna.

Obravnavajmo delne vsote

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^p}.$$

Da bi dokazali konvergenco, bomo pokazali, da je zaporedje  $(S_N)$  navzgor omejeno. Za vsak  $N > 1$  ocenimo  $S_N$  od zgoraj.

Najprej opazimo, da za vsako naravno število  $k$  velja

$$\frac{1}{(2^k)^p} = \frac{1}{2^{kp}}.$$

Razdelimo člene v bloke dolžine  $2^{k-1}$  in uporabimo monotonost zaporedja  $1/n^p$ :

$$\begin{aligned} S_N &< S_{2^{N-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(2^N - 1)^p} \\ &\leq 1 + \left( \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right) + \left( \frac{1}{2^{2p}} + \cdots + \frac{1}{2^{2p}} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2^{(N-1)p}} + \cdots + \frac{1}{2^{(N-1)p}} \right). \end{aligned}$$

Vsak izmed blokov ima  $2^{k-1}$  členov, zato dobimo

$$S_N \leq 1 + \frac{2^{1-1}}{2^p} + \frac{2^{2-1}}{2^{2p}} + \cdots + \frac{2^{(N-1)-1}}{2^{(N-1)p}}.$$

Ker je

$$\frac{2^{k-1}}{2^{kp}} = \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^k,$$

dobimo geometrijsko vrsto s količnikom

$$q = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Za  $p > 1$  velja  $q < 1$ , zato je geometrijska vrsta konvergentna. S tem dobimo oceno

$$S_N < 1 + \sum_{k=1}^{N-1} q^k = 1 + \frac{q - q^N}{1 - q} < \frac{1}{1 - q}.$$

Torej so vse delne vsote omejene s

$$S_N < \frac{1}{1 - (1/2^{p-1})},$$

kar pomeni, da je zaporedje  $(S_N)$  navzgor omejeno in zato konvergentno. S tem smo dokazali konvergenco  $p$ -vrste za  $p > 1$ .

### 5.1.2 Kriteriji za konvergentnost vrst

Za preučevanje konvergence vrst ni dovolj zgolj analiza zaporedja členov, saj iz pogoja  $a_n \rightarrow 0$  ne moremo sklepati o obnašanju delnih vsot. Zato pri vrstah uporabljamo posebne kriterije, ki omogočajo primerjanje z znanimi vrstami, ocenjevanje rasti členov in analizo njihove strukture. Med najpogosteje uporabljenimi so primerjalni kriterij, kvocientni kriterij in Cauchyjev korenski kriterij, ki skupaj odgovorijo na večino situacij pri preučevanju konvergence številskih vrst.

**Izrek 5.3** (Primerjalni kriterij). Naj bosta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

vrsti s pozitivnimi členi in naj velja  $a_n \leq b_n$  za vsak  $n \in \mathbb{N}$ . Tedaj velja:

- če je vrsta  $\sum b_n$  konvergentna, je konvergentna tudi vrsta  $\sum a_n$ ;
- če je vrsta  $\sum a_n$  divergentna, je divergentna tudi vrsta  $\sum b_n$ .

*Dokaz.* Označimo delne vsote s

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S'_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Ker  $a_k \leq b_k$  za vse  $k$ , sledi takoj

$$S_n \leq S'_n \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Če je vrsta  $\sum b_n$  konvergentna, je zaporedje  $(S'_n)$  navzgor omejeno. Iz  $S_n \leq S'_n$  sledi, da je omejeno tudi  $(S_n)$ , zato je vrsta  $\sum a_n$  konvergentna.

Če je vrsta  $\sum a_n$  divergentna, je zaporedje  $(S_n)$  neomejeno. Ker  $S'_n \geq S_n$ , mora biti neomejeno tudi zaporedje  $(S'_n)$ , zato vrsta  $\sum b_n$  divergira.  $\square$

*Primer 5.4.* V prejšnjih korakih smo ugotovili, da je harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergentna.

Za vsak  $p < 1$  velja

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n},$$

zato lahko uporabimo primerjalni kriterij: ker je harmonična vrsta divergentna in so členi  $\frac{1}{n^p}$  večji, mora biti vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

divergentna za vsak  $p \leq 1$ .

**Izrek 5.4** (Kvocientni kriterij). Naj bo  $(a_n)$  zaporedje pozitivnih členov. Če obstaja limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

(kjer je  $L$  lahko tudi  $\infty$ ), potem velja:

- če je  $L < 1$ , je vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergentna,
- če je  $L > 1$ , je vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergentna.

V primeru  $L = 1$  kriterij ne daje sklepa.

*Dokaz.* Najprej obravnavajmo primer  $L < 1$ . Izberimo  $\varepsilon > 0$  tako majhen, da je  $L + \varepsilon < 1$ . Po definiciji limite obstaja  $n_0 \in \mathbb{N}$ , da za vse  $n > n_0$  velja

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon.$$

Konvergenca vrste se ne spremeni, če izpustimo končno mnogo začetnih členov, zato lahko obravnavamo vrsto od indeksa  $n_0 + 1$  dalje. Od tu naprej imamo za vsak  $n$  neenakost

$$a_{n+1} \leq (L + \varepsilon) a_n.$$

Z enostavno indukcijo dobimo

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0+1}.$$

Ker geometrijska vrsta s količnikom  $L + \varepsilon < 1$  konvergira, sledi s primerjalnim kriterijem, da konvergira tudi vrsta  $\sum a_n$ .

Če pa je  $L > 1$ , izberemo  $\varepsilon > 0$  tako, da je  $L - \varepsilon > 1$ . Tedaj obstaja  $n_0$ , da za vse  $n > n_0$  velja

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq L - \varepsilon > 1,$$

od koder dobimo  $a_{n+1} > a_n$  za dovolj velike  $n$ . Tako je zaporedje  $(a_n)$  od neke točke dalje strogo naraščajoče in njegova limita ne more biti enaka 0. S tem pa vrsta  $\sum a_n$  ne more konvergirati, saj je pogoj za konvergenco vrste  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Zato je v tem primeru vrsta divergentna.  $\square$

*Opomba 9.* Če je  $L = 1$ , se vrsta lahko vede na različne načine: lahko je konvergentna (npr.  $\sum 1/n^2$ ), divergentna (npr. harmonična vrsta  $\sum 1/n$ ) ali pa ni mogoče odločiti s tem kriterijem. Zato primer  $L = 1$  zahteva druge metode.

Primer 5.5 (Uporaba kvocientnega kriterija).

1. Obravnavajmo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$$

Naj bo  $a_n = \frac{5^n}{n!}$ . Potem dobimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1}.$$

Zato velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1,$$

in po kvocientnem kriteriju vrsta konvergira.

2. Poglejmo še vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{in} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

V obeh primerih je  $a_n = \frac{1}{n^p}$  (pri  $p = 1$  oziroma  $p = 3$ ), zato

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p,$$

in posledično

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1.$$

Kvocientni kriterij torej v tem primeru ne odloči o konvergenci. Vemo pa, da je harmonična vrsta  $\sum \frac{1}{n}$  divergentna, medtem ko je vrsta  $\sum \frac{1}{n^3}$  konvergentna (gre za  $p$ -vrsto s  $p > 1$ ).

**Izrek 5.5** (Cauchyjev korenski kriterij). Naj bo  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vrsta s členi  $a_n \in \mathbb{R}$  ali  $a_n \in \mathbb{C}$ . Če obstaja limita

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

potem velja:

- če je  $L < 1$ , vrsta  $\sum a_n$  konvergira absolutno,
- če je  $L > 1$ , vrsta  $\sum a_n$  divergira,
- v primeru  $L = 1$  kriterij ne poda odgovora.

*Dokaz.* Naj bo najprej  $L < 1$ . Izberimo  $\varepsilon > 0$  tako, da velja  $L + \varepsilon < 1$ . Po definiciji limite obstaja  $n_0$ , da za vsak  $n > n_0$  velja

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq L + \varepsilon.$$

S tem dobimo

$$|a_n| \leq (L + \varepsilon)^n.$$

Ker je geometrijska vrsta s količnikom  $L + \varepsilon < 1$  konvergentna, sledi s primerjalnim kriterijem, da je tudi vrsta  $\sum a_n$  absolutno konvergentna.

Če pa je  $L > 1$ , izberemo  $\varepsilon > 0$  tako, da  $L - \varepsilon > 1$ . Nato obstaja  $n_0$ , da za vsak  $n > n_0$  velja

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq L - \varepsilon > 1,$$

od koder sledi  $|a_n| > 1$  za neskončno mnogo  $n$ , zato  $a_n \not\rightarrow 0$ . Ker je pogoj za konvergenco vrste  $\lim a_n = 0$ , vrsta divergira.

Primer  $L = 1$  ostaja nedoločen in zahteva druge kriterije. □

*Opomba 10.* Korenjski kriterij je pogosto najprimernejši takrat, ko se v členih zaporedja pojavljajo potence oblike  $a_n = c^n$ ,  $a_n = n^n$ ,  $a_n = r^{n^2}$  ali podobni izrazi, pri katerih je odvisnost od  $n$  v eksponentu posebej izrazita. V takih primerih je izračun izraza  $\sqrt[n]{|a_n|}$  običajno enostavnejši in preglednejši kot uporaba količniškega kriterija.

*Primer 5.6.* Razmislimo o vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n}{n+2} \right)^n.$$

Naj bo

$$a_n = \left( \frac{3n}{n+2} \right)^n.$$

Uporabimo korenski kriterij:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3n}{n+2} = 3 \left( \frac{n}{n+2} \right) \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tako dobimo  $L = 3 > 1$ .

Po Cauchyjevem kriteriju je zato vrsta divergentna.

Za primer konvergentne vrste uporabimo vrsto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

Tu je

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 < 1,$$

zato vrsta absolutno konvergira.

### 5.1.3 Posebne vrste in njihova konvergenca

Poleg splošnih kriterijev konvergenca poznamo tudi več pomembnih razredov vrst, pri katerih lahko obnašanje delnih vsot natančno opišemo. Med takšne spadajo geometrijske vrste,  $p$ -vrste in alternirajoče vrste, ki imajo v analizi osrednjo vlogo. Te vrste so pogosto izhodiščni primeri pri primerjalnih kriterijih, hkrati pa ponazarjajo različne načine, kako se lahko vrste vedejo: absolutna konvergenca, pogojna konvergenca ali divergenca. V to skupino spada tudi alternirajoča  $p$ -vrsta

#### Geometrijska vrsta

**Izrek 5.6** (Geometrijska vrsta). Za realno ali kompleksno število  $q$  obravnavajmo vrsto

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Tedaj velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{če } |q| < 1, \\ \text{divergentna,} & \text{če } |q| \geq 1. \end{cases}$$

*Dokaz.* Delna vsota je

$$S_N = 1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

če  $q \neq 1$ . Za  $|q| < 1$  velja  $q^{N+1} \rightarrow 0$ , zato  $S_N \rightarrow \frac{1}{1-q}$ , medtem ko za  $|q| \geq 1$  zaporedje  $(S_N)$  nima limite.  $\square$

*Opomba 11.* Geometrijska vrsta je osrednji primer vrste eksponentne oblike in se pogosto pojavi pri diskontiranju, rasti, napovednih modelih in stohastičnih procesih.

#### $p$ -vrste

**Izrek 5.7** ( $p$ -vrsta). Za realno število  $p$  obravnavajmo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Tedaj velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ je } \begin{cases} \text{konvergentna,} & p > 1, \\ \text{divergentna,} & p \leq 1. \end{cases}$$

*Dokaz.* Za  $p > 1$  integralni kriterij pokaže konvergenca, saj

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$$

konvergira. Za  $p \leq 1$  integral divergira, zato divergira tudi vrsta.  $\square$

*Opomba 12.*  $p$ -vrste predstavljajo tipičen primer vrst z algebrajsko padajočimi členi. Vrednost parametra  $p$  nad ali pod kritično mejo  $p = 1$  določa prehod med konvergenco in divergenco.

### Alternirajoče vrste (Leibnizov kriterij)

**Izrek 5.8** (Leibnizov kriterij). Naj bo  $(a_n)$  zaporedje pozitivnih členov, ki zadošča:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{za vse } n \in \mathbb{N} \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Potem alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergira.

*Opomba 13.* Leibnizov kriterij zagotavlja konvergenco alternirajoče vrste, četudi absolutna konvergenca ne velja. V takih primerih govorimo o *pogojni konvergenci*.

*Primer 5.7.* Vrsta

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

konvergira, ker je  $\frac{1}{n}$  padajoče zaporedje, ki gre proti 0. Gre za znamenito alternirajočo harmonično vrsto.

**Izrek 5.9** (Alternirajoča  $p$ -vrsta). Obravnavajmo alternirajočo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}.$$

Tedaj velja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \quad \text{je} \quad \begin{cases} \text{absolutno konvergentna,} & p > 1, \\ \text{pogojno konvergentna,} & 0 < p \leq 1, \\ \text{divergentna,} & p \leq 0. \end{cases}$$

*Opomba 14.* Vrste lahko razumemo kot “neskončne vsote”, vendar nimajo vseh lastnosti končnih vsot. Pri končnih vsotah vrstni red seštevanja ne vpliva na rezultat (komutativnost velja), pri neskončnih vrstah pa to v splošnem ni res. Posebej: pri pogojno konvergentnih vrstah lahko s preureditvijo členov spremenimo vsoto, ali celo dosežemo divergenco.

*Primer 5.8.* Naj bo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Opazimo, da lahko člene združimo v pare:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

Ker je za vsak  $k \geq 1$

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} > 0,$$

so vse vrednosti oklepajev pozitivne, zato velja  $S > 0$  (natančneje, že vrednost prvega oklepaja da  $S \geq \frac{1}{2}$ ). Torej  $S \neq 0$ .

Sedaj preuredimo člene na naslednji način:

$$S' = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots.$$

Za splošni oklepaj izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} &= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right). \end{aligned}$$

Zato dobimo

$$S' = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \right) = \frac{1}{2} S.$$

Ker je  $S \neq 0$ , sledi  $S' \neq S$ . Torej smo s preureditvijo členov spremenili vsoto vrste. To je značilno za pogojno konvergentne vrste.

## 5.2 Funkcijske vrste

Pri številskih vrstah preučujemo zaporedja realnih števil in konvergenco njihovih delnih vsot. Funkcijske vrste razširijo ta pojem tako, da posamezni členi niso več zgolj števila, temveč funkcije. Konvergenca tako ni več lastnost ene same številčne zaporedne vrste, temveč družine vrst, odvisnih od parametra  $x$ . Za funkcijske vrste se poleg točkovne konvergenca pogosto zanimamo tudi za enakomerno konvergenca, saj je ta ključna pri ohranjanju lastnosti, kot so zveznost, odvedljivost in integrabilnost.

V tem podpoglavju uvedemo osnovne pojme, razliko med točkovno in enakomerno konvergenca ter podamo nekaj temeljnih rezultatov, ki so osnova za potenčne in Taylorjeve vrste, obravnavane v nadaljevanju.

### 5.2.1 Točkovna konvergenca funkcijskih vrst

**Definicija 5.2.** Naj bo  $(f_n)$  zaporedje funkcij na množici  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

točkovno konvergira na  $D$ , če za vsak  $x \in D$  konvergira številka vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Njena vsota je funkcija

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

*Opomba 15.* Točkovna konvergenca sama po sebi ne zagotavlja ohranjanja zveznosti, odvedljivosti ali integrabilnosti, zato v analizi pogosto zahtevamo močnejše oblike konvergence.

### 5.2.2 Enakomerna konvergenca

**Definicija 5.3.** Zaporedje funkcij  $(S_N)$ , kjer je

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x),$$

*enakomerno konvergira* na  $D$  proti funkciji  $S$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $N_0$ , da za vsak  $N > N_0$  in vse  $x \in D$  velja

$$|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

V tem primeru pravimo, da tudi vrsta  $\sum f_n$  enakomerno konvergira na  $D$ .

**Izrek 5.10** (Weierstrassov M-test). Naj bodo funkcije  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  in naj obstajajo števila  $M_n > 0$ , da za vse  $x \in D$  velja

$$|f_n(x)| \leq M_n.$$

Če je številska vrsta  $\sum M_n$  konvergentna, potem funkcijska vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

enakomerno konvergira na  $D$ .

*Opomba 16.* M-test je eno najmočnejših orodij pri preverjanju enakomerne konvergence in zagotavlja tudi absolutno konvergenco vsake funkcijske vrste.

### 5.2.3 Potenčne vrste

**Definicija 5.4.** Vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

je *potenčna vrsta* s središčem v  $x_0$ . Konvergenca take vrste določa interval konvergence okoli  $x_0$ , katerega velikost opisuje parameter  $R$ , imenovan *radij konvergence*.

**Izrek 5.11** (Radij konvergence). Za potenčno vrsto  $\sum a_n(x - x_0)^n$  obstaja število  $R \in [0, \infty]$ , tako da:

$$\sum a_n(x - x_0)^n \begin{cases} \text{konvergira absolutno,} & |x - x_0| < R, \\ \text{divergira,} & |x - x_0| > R. \end{cases}$$

Na robu  $|x - x_0| = R$  je potrebno konvergenco preveriti posebej.

*Opomba 17.* Najpogosteje določamo  $R$  s pomočjo količinskega ali korenskega kriterija:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ali} \quad \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

kadar limita obstaja.

## 5.2.4 Taylorjeve vrste

Taylorjeve vrste so ena najpomembnejših oblik potenčnih vrst. Uporabljamo jih za lokalno aproksimacijo funkcij s polinomi in za razvoj funkcij v neskončne potenčne vrste. Če je funkcija dovolj gladka, lahko z njo povežemo potenčno vrsto, katere koeficiente določajo odvodi funkcije v izbrani točki. Taylorjeve vrste predstavljajo temelj mnogih metod v matematični analizi, numerični matematiki, fiziki, ekonomiji in inženirstvu. Podrobneje bomo Taylorjeve vrste obravnavali v poglavju o uporabi odvoda. V nadaljevanju zgoj navajamo primere Taylorjevih vrst.

### Najpogostejše Taylorjeve vrste

V praksi se pogosto uporabljajo Taylorjeve vrste najbolj osnovnih funkcij:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

*Opomba 18.* Te vrste so temelj mnogih aproksimacijskih metod v numerični matematiki in ekonomskih modelih (diskontiranje, linearizacije, stabilnostne analize).

## 5.3 Vrste v ekonomiji

V ekonomiji se vrste pojavljajo naravno pri analizi količin, ki jih opisujemo kot zaporedja skozi čas: prihodkov, stroškov, cen, donosov, rasti ali diskontiranih tokov. Ker veliko ekonomskih pojavov temelji na ponavljajočih se procesih (akumuliranje obresti, diskontiranje prihodnosti, prilagajanje cen, napovedovanje trgov), se izračuni pogosto reducirajo na preučevanje konvergence vrst in na uporabo izrazov, ki izhajajo iz geometrijskih ali splošnih številsko-funkcijskih vrst.

Vrste so pri tem orodje, ki omogoča:

- opis dolgoročnega vedenja ekonomskih spremenljivk,
- izračun sedanjih vrednosti prihodnjih denarnih tokov,
- modeliranje rasti, stabilnosti in kumulativnih učinkov,
- uporabo aproksimacij (npr. Taylorjevih vrst) pri ekonomskih funkcijah.

V nadaljevanju navedimo nekaj tipičnih področij uporabe.

### Diskontiranje in vrednotenje denarnih tokov

Ena najpogostejših uporab vrst je izračun sedanje vrednosti prihodnjih plačil. Pri konstantni obrestni meri  $r$  in enakomernih plačilih  $C$  dobimo:

$$PV = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^n},$$

kar je geometrijska vrsta. Konvergenca vrste nam pove, da neskončne rente pri  $r > 0$  vedno obstajajo in imajo končno sedanjo vrednost.

### Modeli gospodarske rasti

V dinamičnih modelih rasti (Solow, Ramsey, neoklasični modeli) se prihodnje vrednosti proizvodnje, kapitala ali potrošnje zapisujejo kot vsote naraščajočega števila členov, pri čemer je odločilna konvergenca ustreznih vrst. Npr. akumulacija kapitala vodi do izrazov oblike:

$$K_t = \sum_{n=0}^t sY_{t-n}(1-\delta)^n,$$

kjer izraz predstavlja končno geometrijsko vrsto s parametri varčevanja in amortizacije.

### Ekonometrija in časovne vrste

V ekonomskih časovnih vrstah (AR, MA, ARMA modeli) se signal pogosto zapiše kot vrsta uteženih preteklih šokov. Primer:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \varepsilon_{t-n},$$

kjer konvergenca vrste  $\sum \theta_n$  določa stabilnost procesa.

### Cene finančnih instrumentov

Pri vrednotenju finančnih instrumentov se mnogi modeli opirajo na vrste:

- **obveznice:** diskontirane vrste kuponov,
- **opcije:** Taylorjeve vrste za aproksimacijo cen funkcij volatilitosti,
- **portfeljska teorija:** razvoj funkcij donosnosti in tveganja.

Vrste imajo tako pomembno vlogo pri analizi ekonomskih odločitev, vrednotenju instrumentov in razumevanju dinamičnih sistemov. S tem povezujejo matematično teorijo konvergence z ekonomskimi aplikacijami.

## Naloge

1. Ugotovi konvergenco ali divergenco vrste:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

2. Preuči vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Uporabi primerjalni ali kvocientni kriterij.

3. Raziskuj konvergenco vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}.$$

Uporabi integralni kriterij.

4. Uporabi korenski kriterij za vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+2} \right)^{n^2}.$$

5. Določi, ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

konvergentna, divergentna, absolutno ali pogojno konvergentna.

6. Za katere realne vrednosti parametra  $p$  konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p + 1}?$$

7. Razstavi delne vsote geometrijske vrste in izračunaj njeno vsoto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

8. Preuči konvergenco alternirajoče vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Utemelji tudi, zakaj absolutna konvergenca ne velja.

9. Uporabi Raabejev kriterij za odločitev o konvergenci vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

10. (Ekonomska uporaba) Diskontna stopnja  $r = 0.05$ . Preuči konvergenco vrste sedanjih vrednosti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{(1+r)^n}.$$

Izračunaj tudi njeno vsoto in razloži pomen rezultata v kontekstu neskončne rente.

# Poglavje 6

## Odvod

### Uvod

V matematiki in njenem širokem spektru uporab predstavlja *odvod funkcije* eno najpomembnejših orodij za razumevanje sprememb, dinamike in lokalnega obnašanja funkcij. Kadar nas zanima, kako hitro se neka količina spreminja, na kakšen način narašča ali pada, ali kako se odziva na majhne spremembe vhodne spremenljivke, nastopi potreba po konceptu odvoda. Odvod tako igra ključno vlogo pri opisu hitrosti in pospeška v fiziki, pri analizi mejnih veličin v ekonomiji, pri modeliranju rasti populacij v biologiji, pri upravljanju sistemov v tehniki ter v številnih drugih naravoslovnih in družboslovnih disciplinah.

Čeprav se sodobna definicija odvoda opira na strogo teorijo limite in natančno  $\varepsilon$ - $\delta$  formalizacijo, ideja izvira že iz antične Grčije. Arhimed je s tako imenovano metodo izčrpavanja intuitivno uporabljal pojme, ki jih danes prepoznavamo kot predhodnike diferenciacije. Prelom pa se je zgodil v 17. stoletju, ko sta Isaac Newton in Gottfried Wilhelm Leibniz neodvisno drug od drugega razvila osnove diferencialnega in integralnega računa. Newton je odvod razumel kot hitrost spremembe veličine v času, medtem ko je Leibniz odvod interpretiral kot razmerje med “neskončno majhnimi” spremembami spremenljivke. Prav Leibnizova notacija  $\frac{dy}{dx}$  se zaradi svoje nazornosti ohranja še danes.

Odvod lahko intuitivno razumemo kot *naklon tangente* na graf funkcije v izbrani točki. Če se graf funkcije v majhni okolici dobro približa premici, je ta premica najboljši lokalni linearni približek funkcije, njen naklon pa predstavlja vrednost odvoda. Tako odvod razkriva lokalno geometrijo grafa in hkrati predstavlja orodje za raziskovanje globalnih lastnosti funkcij: z njegovo pomočjo ugotavljamo, kje funkcija narašča ali pada, kje doseže lokalne ekstreme, kako je ukrivljena ter kako se odziva na spremembe vhodnih podatkov.

V sodobni matematični analizi je odvod osrednji koncept, ki omogoča natančno oblikovanje lokalnih aproksimacij funkcij (Taylorjev polinom), analizo mehanskih sistemov, reševanje optimizacijskih problemov in razumevanje številnih pojavov v naravi. Predstavlja most med algebro in geometrijo: algebrske lastnosti odvoda razkrivajo geometrijske značilnosti grafa funkcije, geometrijske interpretacije pa vodijo do novih analitičnih metod.

V tem poglavju uvedemo formalno definicijo odvoda, spoznamo osnovna pravila za odvajanje, predstavimo odvode najpogostejših elementarnih funkcij ter raziskujemo geometrijski pomen odvoda. S tem oblikujemo temeljno orodje za nadaljnji študij matematične analize, optimizacije, ekonomskih modelov ter drugih področij, kjer je razumevanje sprememb ključno.

## 6.1 Definicija odvoda funkcije

V tem razdelku uvedemo temeljni pojem diferencialnega računa – *odvod funkcije*. Odvod opisuje, kako hitro se funkcija lokalno spreminja, in predstavlja osnovo za analizo dinamike funkcij, iskanje ekstremov ter lokalnih aproksimacij.

Naj bo funkcija  $f$  definirana na intervalu  $(a, b)$  in naj bo  $x_0 \in (a, b)$  poljubna točka. Zanima nas, kako se spremeni vrednost funkcije, ko argument  $x$  malo premaknemo od  $x_0$  do  $x_0 + h$ . Prirastek vrednosti funkcije je

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0),$$

diferenčni kvocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

pa opisuje povprečno hitrost spremembe funkcije med točkama  $x_0$  in  $x_0 + h$ .

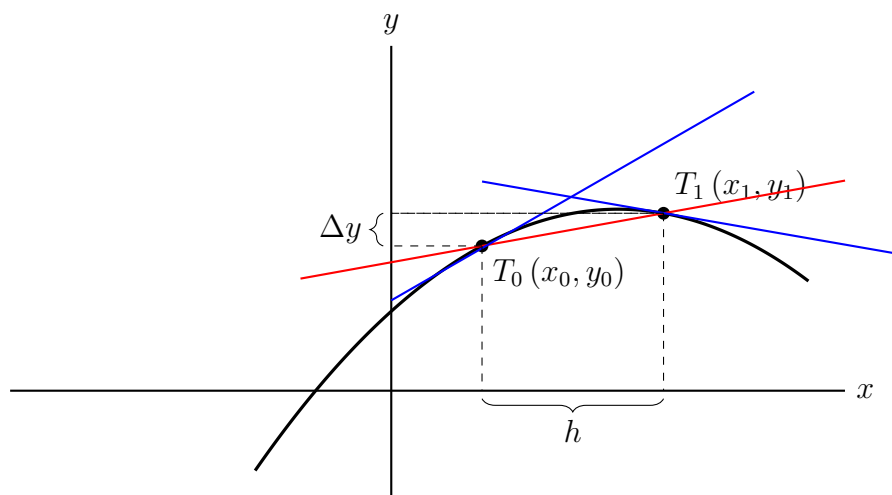
**Definicija 6.1.** Funkcija  $f$  je *odvedljiva* v točki  $x_0$ , če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Število  $f'(x_0)$  imenujemo *odvod funkcije  $f$  v točki  $x_0$* .

Poglejmo kako lahko geometrijsko predstavimo ta diferenčni kvocient. Premica, ki skozi točki  $(x_0, f(x_0))$  in  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  poteka po grafu funkcije, oklepa s pozitivnim delom osi  $x$  kot, katerega tangens je enak vrednosti diferenčnega kvocienta. To pomeni, da ta količina natančno opisuje smerni koeficient sekante na graf funkcije med omenjenima točkama. Ko  $h \rightarrow 0$ , sekanta postopoma prehaja v tangento, torej v najboljši možni linearni približek grafa funkcije v točki  $x_0$ .

Funkcija je v točki  $x_0$  odvedljiva natanko tedaj, ko v tej točki obstaja tangenta na njen graf; vrednost odvoda  $f'(x_0)$  pa predstavlja smerni koeficient te tangente.



Slika 6.1: Geometrijski prikaz odvoda.

Geometrijsko odvod torej predstavlja smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki  $(x_0, f(x_0))$ . Če leva in desna limita diferenčnega kvocienta obstajata in sta enaki, je funkcija v točki odvedljiva.

*Opomba 19.* Če obstaja samo leva limita

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pravimo, da je funkcija odvedljiva z leve. Podobno definiramo desni odvod.

**Izrek 6.1.** Če je funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $x_0$ , potem je v tej točki tudi zvezna.

*Primer 6.1.*

1. Za funkcijo  $f(x) = x^2$  je

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h,$$

zato je

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

2. Funkcija  $f(x) = |x|$  ni odvedljiva v  $x = 0$ , saj sta levi in desni odvod različna:

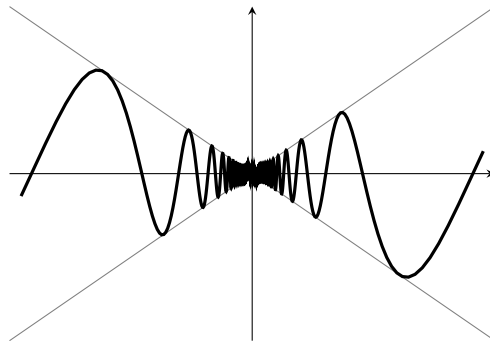
$$f'_-(0) = -1 \quad \text{in} \quad f'_+(0) = 1.$$

Funkcija v tej točki ni odvedljiva. To se na grafu funkcije pozna tako, da je v točki  $x_0$  graf prelomljen.

3. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je v 0 zvezna, ni pa odvedljiva, saj limita  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(1/h)$  ne obstaja.



Slika 6.2: Graf funkcije  $f(x) = x \sin(1/x)$  v okolici  $x = 0$ .

**Definicija 6.2.** Funkcija  $f$  je *odvedljiva* na odprtem intervalu  $(a, b)$ , če je odvedljiva v vsaki točki  $x \in (a, b)$ . Na zaprtem intervalu  $[a, b]$  je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki  $x \in (a, b)$  in če v levem krajišču  $a$  obstaja desni odvod, v desnem krajišču  $b$  pa levi odvod.

Funkcija, ki je na nekem intervalu odvedljiva, je na tem intervalu tudi zvezna. Njen odvod  $f'(x)$  je tudi funkcija, definirana na tem intervalu.

## 6.2 Pravila za odvajanje

V nadaljevanju predstavimo osnovna pravila za izračunavanje odvodov. Ta pravila nam omogočajo učinkovito odvajanje tudi bolj zapletenih funkcij, ki so sestavljene iz elementarnih funkcij. Dokazi temeljijo na limiti diferenčnega kvocienta.

**Izrek 6.2** (Odvod konstante). Naj bo  $c \in \mathbb{R}$ . Potem je funkcija  $f(x) = c$  odvedljiva v vsaki točki in

$$f'(x) = 0.$$

**Izrek 6.3** (Odvod identitete). Za funkcijo  $f(x) = x$  na  $\mathbb{R}$  velja

$$f'(x) = 1.$$

**Izrek 6.4** (Odvajanje vsote in razlike). Če sta funkciji  $f$  in  $g$  odvedljivi, potem sta odvedljivi tudi  $f + g$  in  $f - g$ , pri čemer velja

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g'.$$

*Dokaz.* Naj bo  $F = f + g$ . Diferenčni kvocient funkcije  $F$  v točki  $x$  je

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Ker sta  $f$  in  $g$  odvedljivi v  $x$ , obstajata limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x).$$

Zato lahko limitiramo členoma posebej in dobimo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

Dokaz za razliko je povsem analogen, saj pri  $F = f - g$  v diferenčnem kvocientu nastopa razlika ustreznih členov.  $\square$

**Izrek 6.5** (Produktno pravilo). Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi funkciji v okolici točke  $x$ . Tedaj je tudi produkt  $fg$  odvedljiv in velja

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

*Dokaz.* Naj bo  $F = fg$ . Diferenčni kvocient funkcije  $F$  je enak

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Prištejmo in odštejmo člen  $f(x+h)g(x)$ , da dobimo

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &\quad + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}. \end{aligned}$$

Zapišemo kot produkt vsote in razlike:

$$= \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ker je v limitnem prehodu  $h \rightarrow 0$

$$f(x+h) \rightarrow f(x), \quad g(x+h) - g(x) \rightarrow h g'(x), \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow f'(x),$$

dobimo

$$F'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$\square$

**Izrek 6.6** (Kvocientno pravilo). Če sta funkciji  $f$  in  $g$  odvedljivi v točki  $x$  in je  $g(x) \neq 0$ , potem je tudi  $\frac{f}{g}$  odvedljiva v  $x$  in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

**Izrek 6.7** (Verižni zakon). Naj bo  $u$  odvedljiva funkcija in naj bo  $f$  odvedljiva funkcija v točki  $u(x)$ . Potem je kompozitum  $F(x) = f(u(x))$  odvedljiv in

$$F'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

*Opomba 20.* Verižni zakon je ključen pri odvodu funkcij, kot so  $e^{g(x)}$ ,  $\ln(g(x))$ , trigonometrične kompozicije in racionalne potence funkcij. V tej obliki ga pogosto imenujemo tudi *pravilo o odvodu sestavljene funkcije*.

*Opomba 21.* Pravila za odvajanje lahko kombiniramo. Pri odvodu zapletenih funkcij si pomagamo z razčlenitvijo: začnemo z najbolj zunanjim slojem funkcije (kompozitum) in nadaljujemo navznoter (produkt, kvocient, potence).

*Primer 6.2.*

1. Naj bo  $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ . Uporabimo kvocientno pravilo:

$$f'(x) = \frac{(2x) \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

2. Za funkcijo  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$  najprej prepoznamo kompozitum  $g(h(x))$  s  $h(x) = x^2 + 3$  in  $g(t) = \sqrt{t}$ . Verižni zakon da:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

3. Naj bo  $f(x) = \sin(3x^2)$ . Tedaj je

$$f'(x) = \cos(3x^2) \cdot 6x.$$

## 6.3 Odvodi elementarnih funkcij in višji odvodi

V tem razdelku zberemo najpomembnejše odvode elementarnih funkcij, ki jih bomo v nadaljevanju pogosto uporabljali. Pri dokazih se opiramo na definicijo odvoda in pravila za odvajanje.

### 6.3.1 Odvod eksponentne funkcije

**Izrek 6.8.** Naj bo  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Eksponentna funkcija  $f(x) = a^x$  je odvedljiva na  $\mathbb{R}$  in velja

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

*Dokaz.* Po definiciji odvoda je

$$(a^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Označimo  $t = a^h - 1$ , tedaj  $t \rightarrow 0$ , ko  $h \rightarrow 0$ , in ker je  $h = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$ , dobimo

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t \ln a}{\ln(1+t)}.$$

Z upoštevanjem znane limite  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$  sledi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a,$$

zato je  $(a^x)' = a^x \ln a$ . □

Poseben primer je naravna eksponentna funkcija:

$$(e^x)' = e^x.$$

### 6.3.2 Odvod logaritmske funkcije

**Izrek 6.9.** Naj bo  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Logaritmska funkcija  $f(x) = \log_a x$  je odvedljiva na  $(0, \infty)$  in velja

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

*Dokaz.* Ker je  $y = \log_a x$  inverzna funkcija k  $x = a^y$ , uporabimo pravilo za odvod inverzne funkcije:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'}$$

Po prejšnji točki je  $(a^y)' = a^y \ln a = x \ln a$ , zato

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

□

Zlasti za naravni logaritem  $\ln x = \log_e x$  dobimo

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

### 6.3.3 Odvod potence

**Izrek 6.10.** Za realni eksponent  $r$  in  $x > 0$  velja

$$(x^r)' = r x^{r-1}.$$

*Dokaz.* Za racionalni  $r$  je formula znana iz prejšnjih zgledov. Za splošen  $r \in \mathbb{R}$  zapišemo  $x^r = e^{r \ln x}$ , zato po verižnem zakonu dobimo

$$(x^r)' = (e^{r \ln x})' = e^{r \ln x} (r \ln x)' = x^r \cdot r \frac{1}{x} = r x^{r-1}.$$

□

Posebna primera:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

### 6.3.4 Odvodi kotnih (trigonometričnih) funkcij

**Izrek 6.11.** Trigonometrične funkcije so odvedljive na  $\mathbb{R}$  in veljajo zveze

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).\end{aligned}$$

*Dokaz.* Odvoda funkcij  $\sin x$  in  $\cos x$  smo že izpeljali, zato lahko odvod funkcij  $\tan x$  dobimo s kvocientnim pravilom. Ker je

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

velja za vse  $x$ , kjer je  $\cos x \neq 0$ ,

$$(\tan x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

S tem je dokaz končan. Enako izpeljemo tudi formulo za odvod funkcije  $\cot x$   $\square$

### 6.3.5 Odvodi ciklometričnih (inverznih trigonometričnih) funkcij

**Izrek 6.12.** Ciklometrične funkcije so odvedljive na svojih naravnih domenah in veljajo:

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}, \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

*Dokaz.* Naj bo  $y = \arcsin x$ . Tedaj je

$$x = \sin y, \quad y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Odvajamo implicitno po  $x$ :

$$1 = (\sin y)' y' = \cos y y'.$$

Zato je

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Ker za  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$  velja  $\cos y \geq 0$  in je

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

sledi

$$(\arcsin x)' = y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Uporabimo zvezo

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| < 1.$$

Odvajamo po  $x$ :

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0.$$

Ker smo dokazali  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , sledi

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Naj bo  $y = \arctan x$ . Potem je

$$x = \tan y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Odvajamo implicitno:

$$1 = (\tan y)' y' = \frac{1}{\cos^2 y} y'.$$

Zato je

$$y' = \cos^2 y.$$

Ker je  $\tan y = x$ , dobimo

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Sledi

$$(\arctan x)' = y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Uporabimo zvezo med inverznima funkcijama:

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odvajamo po  $x$ :

$$(\arctan x)' + (\operatorname{arccot} x)' = 0.$$

Ker je  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ , sledi

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

□

### 6.3.6 Odvodi hiperboličnih funkcij

Hiperbolične funkcije so odvedljive na  $\mathbb{R}$  in veljajo:

$$\begin{aligned}(\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x, \\ (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & (\coth x)' &= -\frac{1}{\sinh^2 x}.\end{aligned}$$

*Dokaz.* Formule za odvode hiperboličnih funkcij dobimo s pomočjo pravila za odvod posredne funkcije in definicije hiperboličnih funkcij.  $\square$

### 6.3.7 Tabela odvodov elementarnih funkcij

V nadaljevanju so navedeni najpogosteje uporabljeni odvodi:

$$\begin{aligned}(c)' &= 0, & (x)' &= 1, \\ (x^r)' &= rx^{r-1}, & (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (e^x)' &= e^x, & (a^x)' &= a^x \ln a, \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}, & (\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}, \\ (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \\ (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \\ (\sinh x)' &= \cosh x, & (\cosh x)' &= \sinh x, \\ (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & (\coth x)' &= -\frac{1}{\sinh^2 x}.\end{aligned}$$

### 6.3.8 Višji odvodi

**Definicija 6.3.** Naj bo funkcija  $f$  odvedljiva na intervalu  $I$ . Če je tudi njen odvod  $f'$  odvedljiv na  $I$ , potem  $f'' = (f')'$  imenujemo *drugi odvod* funkcije  $f$ . Induktivno definiramo  $n$ -ti odvod:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemer je  $f^{(0)} = f$ . Funkcijo, ki ima odvode vseh redov, imenujemo *neskončnokrat odvedljiva*.

*Primer 6.3.*

1. Za polinom  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  velja

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + \dots + 2a_2 x + a_1,$$

in splošno

$$p^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1)a_n x^{n-k}, \quad k \leq n,$$

medtem ko je  $p^{(k)}(x) = 0$  za vsak  $k > n$ .

2. Funkciji  $\sin x$  in  $\cos x$  sta neskončnokrat odvedljivi, njuni odvodi se periodično ponavljajo:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

*Opomba 22.* Višji odvodi imajo pomembno vlogo pri opisu ukrivljenosti grafa (drugi odvod), pri Taylorjevih polinomih in pri analizi ekonomskih modelov (npr. mejni stroški, mejni prihodki, elastičnosti).

## Naloge

1. Izračunaj odvod funkcije:

$$f(x) = 3x^5 - 4x^2 + 7.$$

2. Izračunaj odvod funkcije:

$$f(x) = \sqrt{x} e^{2x}.$$

3. Izračunaj odvod funkcije:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0.$$

4. Izračunaj odvod funkcije:

$$f(x) = a^{3x+1}, \quad a > 0, a \neq 1.$$

5. Določi drugi odvod funkcije:

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x.$$

6. Izračunaj odvod:

$$f(x) = \tan(2x^2 - 1).$$

7. Izračunaj odvod ciklotrične funkcije:

$$f(x) = \arcsin(3x), \quad |3x| < 1.$$

8. Izračunaj odvod funkcije:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

9. Izračunaj drugi odvod funkcije:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1).$$

10. Izračunaj odvod hiperbolične funkcije:

$$f(x) = \cosh(3x) - 2 \sinh(x).$$

## 6.4 Geometrijski pomen odvoda

Odvod funkcije je matematično opredeljen kot limita diferenčnega kvocienta, vendar njegova najgloblja interpretacija izhaja iz geometrije. Že Newton in Leibniz sta v 17. stoletju opazila, da odvod v točki opisuje *trenutno spremembo* funkcije ter da se ta sprememba na grafu kaže kot *smerni koeficient tangente*. S tem pristopom je mogoče lokalno ukrivljen graf funkcije približati s premico–tangento, kar je temelj geometrijskega razumevanja odvoda. V nadaljevanju formaliziramo ta pogled in uvedemo diferencial funkcije kot linearen približek.

### 6.4.1 Tangenta na graf funkcije

Naj bo  $f$  realna funkcija, odvedljiva v točki  $x_0$ . Kvocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

predstavlja smerni koeficient sekante, ki povezuje točki  $(x_0, f(x_0))$  in  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$  na grafu funkcije.

Ko se  $h$  približuje nič ( $h \rightarrow 0$ ), sekanta prehaja v tangento. Če limita obstaja, definiramo odvod funkcije v točki  $x_0$  kot

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ta limita predstavlja smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki  $x_0$ , torej velja  $k = f'(x_0)$ .

**Definicija 6.4.** Naj bo funkcija  $f$  odvedljiva v točki  $x_0$ . Tangenta na graf funkcije v točki  $(x_0, f(x_0))$  je premica s smernim koeficientom  $k = f'(x_0)$  in ima enačbo

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

*Opomba 23.* Tangenta predstavlja najboljši linearni približek grafa funkcije v neposredni bližini točke  $x_0$ . Če je odvod pozitiven, tangenta narašča; če je negativen, pada; če je enak nič, je tangenta vodoravna.

*Primer 6.4.* Naj bo  $f(x) = x^2$ . Tedaj je  $f'(x) = 2x$ , zato ima tangenta v točki  $x_0$  enačbo

$$T(x) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0).$$

Za  $x_0 = 1$  dobimo  $T(x) = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$ , kar dobro aproksimira graf  $x^2$  v bližini  $x = 1$ .

### 6.4.2 Diferencial funkcije

Odvod funkcije v točki opisuje spremembo vrednosti funkcije glede na spremembo argumenta. Za bolj učinkovito uporabo tega dejstva uvedemo pojem diferenciala, ki predstavlja linearni del spremembe funkcije.

**Definicija 6.5.** Naj bo  $f$  odvedljiva v točki  $x_0$ . Diferencial funkcije  $f$  v  $x_0$  je linearna preslikava

$$df(x_0): \Delta x \mapsto f'(x_0) \Delta x.$$

Pri spremembi argumenta  $x_0 \mapsto x_0 + \Delta x$  zapišemo diferencial kot

$$df(x_0) = f'(x_0) dx,$$

kjer je  $dx$  simbol za  $\Delta x$ .

*Opomba 24.* Diferencial  $df$  predstavlja najboljši linearni približek dejanske spremembe funkcije. Velja

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

kjer je  $o(\Delta x)$  člen, ki postane zanemarljiv v primerjavi z  $\Delta x$ , ko  $\Delta x \rightarrow 0$ .

*Primer 6.5.* Naj bo  $f(x) = \sqrt{x}$  in naj bo  $x_0 = 4$ . Odvod je  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , zato

$$df(4) = \frac{1}{4} dx.$$

Če  $dx = 0,1$ , dobimo približek

$$\sqrt{4,1} - \sqrt{4} \approx df(4) = 0,025.$$

*Opomba 25.* Diferencial ima pomembno vlogo v matematični analizi, numerični matematiki, geometriji in ekonomiji. V ekonomiji predstavlja npr. *mejne spremembe* (marginalne količine): mejni stroški, mejni prihodki in elastičnosti so vse neposredne aplikacije diferenciala.

## Naloge

1. Dana je funkcija s predpisom  $f(x) = x^3 - 2x$ . Izračunaj smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki  $x = 1$ .
2. Določi enačbo tangente na graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}$$

v točki  $x = 4$ .

3. Za funkcijo  $f(x) = e^x$  določi enačbo tangente v točki  $x = 0$ . Nariši skico grafa funkcije in tangente.
4. Funkcija  $f$  je dana z  $f(x) = \ln(x + 1)$ . Poišči vse točke, v katerih je tangenta vodoravna.
5. Naj bo  $f(x) = x^2$ . V katerem intervalu je tangenta na graf funkcije strmejša od premice  $y = 3x$ ?
6. Pri funkciji  $f(x) = \sin x$  poišči enačbo tangente v točki  $x = \frac{\pi}{3}$ .

7. Naj bo  $f$  zvezna in odvedljiva funkcija. Pojasni, kaj pomeni trditev

Tangenta v točki  $x_0$  je najboljši linearni približek grafa v okolici  $x_0$ .

Dopolni razlago s primerom.

8. Naj bo  $f(x) = \sqrt{x}$ . Izračunaj diferencial  $df$  v točki  $x_0 = 9$  in oceni približno vrednost

$$\sqrt{9.2}.$$

9. Funkcija je dana z  $f(x) = \ln x$ . Uporabi diferencial, da oceniš vrednost  $\ln(1.05)$ .

10. Za funkcijo  $f(x) = \frac{1}{x}$  izračunaj diferencial  $df$  v točki  $x_0 = 5$  in z njegovo pomočjo oceni spremembo funkcije pri prehodu na  $x = 5,1$ .

## 6.5 Uporaba odvoda

Odvod je temeljno orodje matematične analize, saj omogoča razumevanje lokalnih lastnosti funkcij, od linearnih približkov do globjih struktur, kot so monotonost, ekstremi, konveksnost in obnašanje grafa. V tem poglavju obravnavamo najpomembnejše teoretične rezultate, ki povezujejo odvod z geometrijskimi in analitičnimi lastnostmi funkcij.

### 6.5.1 Izreki o srednji vrednosti

Izreki o srednji vrednosti tvorijo most med lokalnim obnašanjem funkcije (odvodom) in njenimi globalnimi lastnostmi na intervalu. Najprej podamo Rolleov izrek, nato Lagrangeev izrek, in še Cauchyjev izrek kot njegovo posplošitev.

**Izrek 6.13** (Rolleov izrek). Naj bo funkcija  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ . Če velja  $f(a) = f(b)$ , potem obstaja  $c \in (a, b)$  tako, da je  $f'(c) = 0$ .

*Dokaz.* Ker je funkcija  $f$  odvedljiva na  $(a, b)$ , je na tem intervalu zvezna. Po izreku o doseganju minimuma in maksimuma zavzame funkcija  $f$  na  $[a, b]$  svojo natančno spodnjo mejo  $m$  in svojo natančno zgornjo mejo  $M$ .

Če je  $m = M$ , je funkcija konstantna in je njen odvod na celem intervalu enak 0, zato trditev velja.

Če pa je  $m < M$ , zavzame funkcija  $f$  vrednost  $m$  ali  $M$  v neki notranji točki  $c \in (a, b)$ . V tej točki gre za lokalni ekstrem funkcije  $f$ . Ker je  $f$  odvedljiva v  $c$ , iz Fermatovega izreka sledi, da je

$$f'(c) = 0.$$

S tem je dokaz končan. □

**Izrek 6.14** (Lagrangeev izrek o srednji vrednosti). Naj bo funkcija  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ . Teda j obstaja  $c \in (a, b)$ , da

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Dokaz.* Definirajmo funkcijo

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ker je  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ , je tudi  $g$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ . Odvod funkcije  $g$  je

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poleg tega velja

$$g(a) = f(a), \quad g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

torej je  $g(a) = g(b)$ . Funkcija  $g$  zato zadošča pogojem Rolleovega izreka, zato obstaja  $c \in (a, b)$ , da je

$$g'(c) = 0.$$

Iz tega sledi

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

oziroma

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

**Izrek 6.15** (Cauchyjev izrek o srednji vrednosti). Naj bosta funkciji  $f$  in  $g$  zvezni na  $[a, b]$  in odvedljivi na  $(a, b)$ . Če je  $g'(x) \neq 0$  za vse  $x \in (a, b)$ , potem obstaja  $c \in (a, b)$  tako, da

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

*Dokaz.* Definirajmo funkcijo

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ker sta  $f$  in  $g$  zvezni na  $[a, b]$  in odvedljivi na  $(a, b)$ , je tudi  $h$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$ . Izračunamo njeni vrednosti v krajiščih:

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = f(a),$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(a).$$

Torej je  $h(a) = h(b)$ , zato funkcija  $h$  zadošča pogojem Rolleovega izreka. Obstaja torej  $c \in (a, b)$ , da je

$$h'(c) = 0.$$

Odvod funkcije  $h$  je

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

zato iz  $h'(c) = 0$  sledi

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

od koder dobimo

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

*Primer 6.6.* Naj bo  $f(x) = x^2$  na intervalu  $[1, 3]$ . Lagrangeev izrek zagotavlja, da obstaja  $c \in (1, 3)$ , za katerega je

$$f'(c) = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4.$$

Ker je  $f'(x) = 2x$ , dobimo  $2c = 4$ , torej  $c = 2$ .

## 6.5.2 L'Hospitalovo pravilo

L'Hôpitalovo pravilo (ki ga je v resnici odkril švicarski matematik Johann Bernoulli (1667–1748)) je preprosta posledica Cauchyjevega izreka o srednji vrednosti in predstavlja zelo uporabno orodje za računanje limit nedoločenih oblik. Najpogosteje ga uporabimo pri limitah izrazov oblike

$$\frac{0}{0} \quad \text{ali} \quad \frac{\infty}{\infty},$$

kjer je neposredno računanje nemogoče ali vodi v nedoločnost.

Poleg teh osnovnih primerov lahko L'Hôpitalovo pravilo uporabimo tudi pri drugih nedoločenih oblikah, pri katerih s primerno preoblikovanjem izrazov dosežemo strukturo  $\frac{0}{0}$  ali  $\frac{\infty}{\infty}$ . Med najpogostejše spadajo:

- $0 \cdot \infty$ , ki jo preoblikujemo v obliko  $\frac{0}{0}$  ali  $\frac{\infty}{\infty}$  z uporabo identitet

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{1/\infty} = \frac{\infty}{1/0},$$

ter ustreznim prepisom.

- $\infty - \infty$ , ki jo s seštevanjem in odštevanjem preoblikujemo v ulomek, na primer

$$\infty - \infty = \frac{(a - b)}{1} = \frac{1/a - 1/b}{(1/a)(1/b)},$$

ali pa z uporabo združevanja členov v en skupni ulomek.

- $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ , ki jih obravnavamo z logaritmiranjem. Najprej preučimo limito

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)},$$

nato vzamemo logaritem

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x),$$

in tako dobimo obliko  $0 \cdot \infty$ , ki jo lahko preoblikujemo v ulomek in uporabimo L'Hôpitalovo pravilo.

V vseh teh primerih je ključni korak, da izraz s primernim prepisom prevedemo na obliko, pri kateri je L'Hôpitalovo pravilo dovoljeno in uporabno. Pravilo je zato eno najmočnejših orodij pri računanju limit.

**Izrek 6.16** (L'Hospitalovo pravilo). Naj bosta  $f$  in  $g$  odvedljivi v okolici točke  $a$  (razen morda v  $a$ ). Če velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

in obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem velja

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Podobno velja tudi za nedoločeno obliko  $\frac{\infty}{\infty}$ .

*Primer 6.7.* Izračunajmo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Ker je  $\sin 0 = 0$  in  $0 = 0$ , lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

### 6.5.3 Taylorjev polinom

Taylorjev polinom omogoča linearne, kvadratne ali višje aproksimacije funkcij v okolici neke točke.

**Definicija 6.6.** Naj bo  $f$   $n$ -krat odvedljiva v okolici točke  $x_0$ . Taylorjev polinom stopnje  $n$  za funkcijo  $f$  v točki  $x_0$  je

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

*Primer 6.8.* Poiščimo Taylorjev polinom stopnje 2 za  $f(x) = e^x$  v točki  $x_0 = 0$ :

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

*Primer 6.9.* Izračunajmo Taylorjev polinom stopnje 2 za funkcijo

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

v točki  $x_0 = 0$ .

Najprej izračunamo vrednost funkcije in njenih odvodov v točki 0.

1. korak: vrednost funkcije v  $x_0 = 0$ :

$$f(0) = \ln(1 + 0) = 0.$$

2. korak: prvi odvod:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1.$$

3. korak: drugi odvod:

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1.$$

4. korak: vstavimo v formulo za Taylorjev polinom stopnje 2: Taylorjev polinom za funkcijo  $f$  v točki  $x_0 = 0$  je

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Vstavimo izračunane vrednosti:

$$T_2(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{-1}{2}x^2.$$

Dobimo Taylorjev polinom:

$$T_2(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

Polinom  $T_2(x)$  je najboljši kvadratni približek funkcije  $\ln(1+x)$  v okolici točke  $x = 0$ . Za majhne vrednosti  $x$  je približek

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$$

zelo natančen.

### 6.5.4 Monotonost funkcije in lokalni ekstremi

Odvod opisuje naraščanje in padanje funkcije ter nam omogoča identifikacijo lokalnih ekstremov.

**Izrek 6.17.** Če je  $f'(x) > 0$  na intervalu  $I$ , je  $f$  na tem intervalu naraščajoča. Če je  $f'(x) < 0$  na  $I$ , je  $f$  padajoča.

*Dokaz.* Dokazali bomo prvi del; drugi je povsem analogen.

Naj bo  $f'(x) > 0$  za vsak  $x \in I$ . Vzemimo poljubni točki  $x_1, x_2 \in I$ , kjer je  $x_1 < x_2$ . Ker je  $f$  odvedljiva na  $I$ , je zvezna na  $I$  in odvedljiva na  $(x_1, x_2)$ . Po Lagrangeevem izreku o srednji vrednosti obstaja točka  $c \in (x_1, x_2)$ , da velja

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ker je  $x_2 - x_1 > 0$  in po predpostavki  $f'(c) > 0$ , sledi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

torej  $f(x_2) > f(x_1)$ . Ker sta bili  $x_1$  in  $x_2$  poljubni točki iz  $I$  z  $x_1 < x_2$ , je funkcija  $f$  na  $I$  naraščajoča.

Če pa je  $f'(x) < 0$  na  $I$ , dobimo pri enakem postopku

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) < 0,$$

zato je  $f(x_2) < f(x_1)$  za vsak  $x_1 < x_2$  in je  $f$  na  $I$  padajoča.  $\square$

*Primer 6.10.* Ugotavljanje monotonosti funkcij s pomočjo odvoda.

1. Določimo intervale, na katerih funkcija narašča ali pada, za

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Odvajamo:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Odvod je negativen za  $x \in (-1, 1)$  in pozitiven za  $x < -1$  ter  $x > 1$ . Točki  $x = -1$  in  $x = 1$  sta kritični točki.

Funkcija je zato:

naraščajoča na  $(-\infty, -1)$  in  $(1, \infty)$ ,

padajoča na  $(-1, 1)$ .

2. Pokažimo, da je funkcija

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x+2}, \quad x > -1,$$

monotono naraščajoča na intervalu  $(-1, \infty)$ .

Odvod je

$$f'(x) = \frac{(x+2)\frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{(x+2)^2}.$$

Ker je imenovalec vedno pozitiven, določimo predznak števca:

$$(x+2)\frac{1}{1+x} - \ln(1+x) = \frac{x+2}{1+x} - \ln(1+x).$$

Za  $x > -1$  je znano, da velja neenačba

$$\ln(1+x) \leq \frac{x}{1+x},$$

pri čemer dobimo

$$\frac{x+2}{1+x} - \ln(1+x) > 0.$$

S tem je dokazano, da je  $f'(x) > 0$  za vsak  $x > -1$ , torej je funkcija naraščajoča na celotnem intervalu  $(-1, \infty)$ .

**Izrek 6.18** (Prvi zadosten pogoj za lokalni ekstrem). Naj bo  $c$  kritična točka funkcije  $f$ , torej  $f'(c) = 0$ . Funkcija  $f$  ima v točki  $c$  lokalni ekstrem natanko takrat, kadar odvod pri prehodu skozi  $c$  spremeni predznak.

Če je  $f'(x) < 0$  za  $x < c$  in  $f'(x) > 0$  za  $x > c$ , ima  $f$  v točki  $c$  lokalni minimum. Če pa je  $f'(x) > 0$  za  $x < c$  in  $f'(x) < 0$  za  $x > c$ , ima  $f$  v točki  $c$  lokalni maksimum.

*Primer 6.11.* Obravnavajmo funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Izračunamo odvod:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Kritični točki dobimo z rešitvijo enačbe  $f'(x) = 0$ , kar da  $x = \pm 1$ .

Predznak odvoda je:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 & \quad \text{za } x < -1, \\ f'(x) > 0 & \quad \text{za } -1 < x < 1, \\ f'(x) < 0 & \quad \text{za } x > 1. \end{aligned}$$

Ker se odvod spremeni iz negativnega v pozitivnega pri  $x = -1$ , ima funkcija tam lokalni minimum. Pri  $x = 1$  se odvod spremeni iz pozitivnega v negativnega, zato ima funkcija v tej točki lokalni maksimum.

**Izrek 6.19** (Drugi zadosten pogoj za lokalni ekstrem). Če je funkcija  $f$  v kritični točki  $c$  dvakrat odvedljiva in velja  $f''(c) > 0$ , ima funkcija  $f$  v točki  $c$  lokalni minimum. Če pa je  $f''(c) < 0$ , ima  $f$  v točki  $c$  lokalni maksimum.

*Primer 6.12.* Obravnavajmo funkcijo

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$$

Odvod je enak

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9,$$

zato dobimo kritični točki iz enačbe  $f'(x) = 0$ :

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Drugi odvod je

$$f''(x) = 6x - 12.$$

V točki  $x = x_1 = 1$  je  $f''(1) = -6 < 0$ , zato je tam lokalni maksimum. V točki  $x = x_2 = 3$  je  $f''(3) = 6 > 0$ , zato je tam lokalni minimum.

**Izrek 6.20** (Tretji zadosten pogoj za lokalni ekstrem). Naj bo funkcija  $f$   $(n+1)$ -krat odvedljiva v okolici točke  $c$ . Če velja

$$f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad f^{(n)}(c) \neq 0,$$

potem je značaj točke  $c$  odvisen od parnosti  $n$ :

- če je  $n$  sodo število, ima  $f$  v točki  $c$  *lokalni minimum*, če je  $f^{(n)}(c) > 0$ , oziroma *lokalni maksimum*, če je  $f^{(n)}(c) < 0$ ;
- če je  $n$  liho število, v točki  $c$  *ni* lokalnega ekstrema.

*Dokaz.* Po Taylorjevi formuli dobimo za dovolj majhen  $h$ :

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,$$

kjer je  $\xi$  točka med  $c$  in  $c+h$ .

Ker so vsi odvodi do reda  $n-1$  v točki  $c$  enaki nič, dobimo poenostavljeno izraz:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n.$$

Če je  $n$  sodo število, denimo  $n = 2k$ , je  $h^n = (h^2)^k \geq 0$  za vsak  $h$ . Za dovolj majhen  $h$  je  $\xi$  blizu  $c$ , zato ima  $f^{(n)}(\xi)$  enak predznak kot  $f^{(n)}(c)$ . Tako velja

$$f(c+h) - f(c) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n \geq 0 \quad \text{ali} \quad \leq 0,$$

in iz tega sledi, da ima funkcija v točki  $c$  lokalni minimum ali maksimum.

Če pa je  $n$  liho, je predznak potence  $h^n$  odvisen od predznaka  $h$ , zato izraz  $f(c+h) - f(c)$  lahko spremeni predznak, kar pomeni, da v točki  $c$  ni ekstrema.  $\square$

*Primer 6.13.* Obravnavajmo funkcijo

$$f(x) = x - \arctan x.$$

Odvod je

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

ki se izniči pri  $x = 0$ , zato je  $x = 0$  kritična točka.

Izračunamo še višje odvode:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4x(1+x^2)^{-2}, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -4(1+x^2)^{-2} + 16x(1+x^2)^{-3}, & f'''(0) &= -4 \neq 0. \end{aligned}$$

Ker je  $f'(0) = f''(0) = 0$  in  $f'''(0) \neq 0$ , je  $n = 3$  liho število, zato funkcija v točki  $x = 0$  *nima lokalnega ekstrema*.

### 6.5.5 Konveksnost, konkavnost in točke prevoja

**Definicija 6.7.** Funkcija  $f$ , definirana na intervalu  $[a, b]$ , je *konveksna*, če za vsak par točk  $x, y \in [a, b]$  in vsak  $\alpha \in (0, 1)$  velja

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Geometrijsko to pomeni, da celoten graf funkcije leži pod vsako daljico, ki povezuje točki  $(x, f(x))$  in  $(y, f(y))$ .

Če pa za vse  $x, y \in [a, b]$  in  $\alpha \in (0, 1)$  velja

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),$$

je funkcija *konkavna*.

*Primer 6.14.* Funkcija  $f(x) = |x|$  je konveksna na celotni množici  $\mathbb{R}$ , saj zaradi trikotniške neenačbe velja

$$|\alpha x + (1 - \alpha)y| \leq \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \quad \text{za vsak } \alpha \in (0, 1).$$

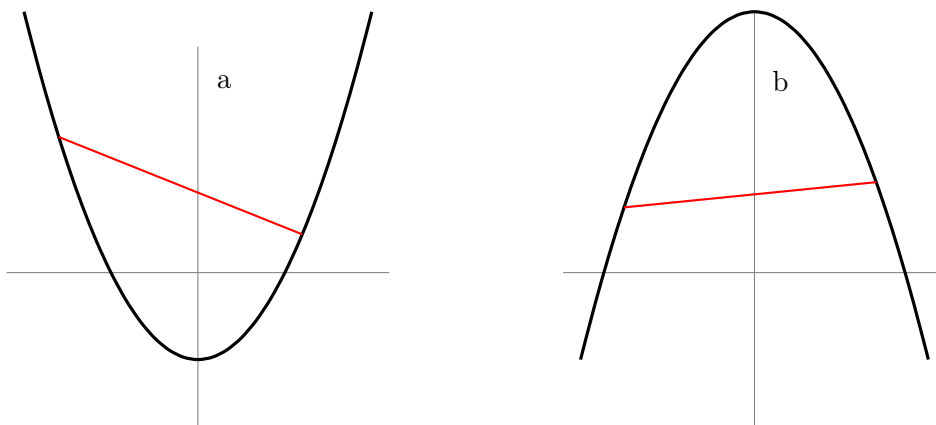
**Izrek 6.21.** Naj bo  $f$  dvakrat odvedljiva na intervalu  $I$ . Tedaj je  $f$  na  $I$

- konveksna, če za vse  $x \in I$  velja  $f''(x) \geq 0$ ,
- konkavna, če za vse  $x \in I$  velja  $f''(x) \leq 0$ .

Konveksnost funkcije se lahko spremeni le v točkah, kjer je  $f''(c) = 0$ . V takšnih točkah ima prvi odvod  $f'$  lokalni ekstrem. Če  $f'$  v točki  $c$  zavzame lokalni maksimum, se  $f$  spremeni iz konveksne v konkavno; če ima  $f'$  lokalni minimum, se funkcija iz konkavne prevesi v konveksno.

**Definicija 6.8.** Točko  $c$ , v kateri se funkcija spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, imenujemo *točka prevoja*.

Če je  $f$  dvakrat odvedljiva in je  $f''(c) = 0$  ter drugi odvod pri prehodu skozi  $c$  spremeni predznak, potem je  $c$  prevojna točka funkcije  $f$ .



Slika 6.3: Konveksna (a) in konkavna (b) funkcija

Iz grafa zlahka razberemo, če je funkcija konveksna ali konkavna: vsaka daljica, ki povezuje dve točki na grafu konveksne funkcije, je nad tistim delom grafa, ki leži med obema točkama. Pri konkavni funkciji je daljica, ki povezuje dve točki na grafu vedno pod grafom.

### 6.5.6 Graf funkcije

Za skico grafa funkcije uporabimo:

- ničle funkcije,
- pole funkcije,
- asimptote,
- intervale naraščanja in padanja,
- lokalne ekstreme,
- intervale konveksnosti in konkavnosti,
- točke prevoja,
- obnašanje pri velikih vrednostih  $x$  (v neskončnosti).

*Primer 6.15.* Narišimo graf funkcije

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Funkcija je definirana in zvezna na celotni množici  $\mathbb{R}$ . Ker velja  $f(-x) = -f(x)$ , je funkcija liha, zato je njen graf simetričen glede na izhodišče. Poleg tega je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0,$$

torej ima graf vodoravno asimptoto  $y = 0$ .

Izračunajmo ničle funkcije:  $f(x) = 0$ , torej  $x = 0$ .

Izračunajmo pole funkcije:  $1 + x^2 = 0$ . Rešitev te enačbe v množici realnih števil ne obstaja, zato ta funkcija nima polov.

Določimo intervale monotonosti. Odvajamo:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Kritični točki dobimo iz enačbe  $f'(x) = 0$ , kar da  $x = \pm 1$ . Ker je imenovalec pozitiven, predznak odvoda določa števec  $1 - x^2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 && \text{za } x < -1, \\ f'(x) &> 0 && \text{za } -1 < x < 1, \\ f'(x) &< 0 && \text{za } x > 1. \end{aligned}$$

Zato funkcija pada na  $(-\infty, -1)$ , narašča na  $(-1, 1)$  in ponovno pada na  $(1, \infty)$ . V točki  $x = -1$  ima lokalni minimum

$$f(-1) = -\frac{1}{2},$$

v točki  $x = 1$  pa lokalni maksimum

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Poiščimo še prevoje. Drugi odvod je

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}.$$

Enačba  $f''(x) = 0$  ima rešitve

$$x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

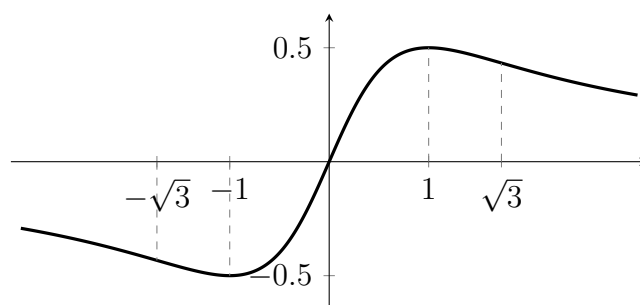
S pregledom predznaka  $f''$  dobimo:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 & \text{ za } x < -\sqrt{3} \text{ in } 0 < x < \sqrt{3} \Rightarrow f \text{ je konveksna,} \\ f''(x) < 0 & \text{ za } -\sqrt{3} < x < 0 \text{ in } x > \sqrt{3} \Rightarrow f \text{ je konkavna.} \end{aligned}$$

Prevojne točke so torej

$$\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), \quad (0, 0), \quad \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Na sliki je prikazan graf funkcije.



Slika 6.4: Graf funkcije  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .

## Naloge

1. Izračunaj limito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}.$$

2. Določi vrednost:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

3. Uporabi L'Hospitalovo pravilo za izračun:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

4. Razvij funkcijo  $f(x) = e^x$  v Taylorjev polinom 2. stopnje okrog točke  $x = 0$ .
5. Na intervalu v bližini  $x = 1$  aproksimiraj  $\sqrt{x}$  s Taylorjevim polinomom 3. stopnje (okrog  $x = 1$ ).
6. Izračunaj Taylorjev polinom 2. stopnje za funkcijo

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

okrog  $x = 0$  in oceni napako za  $|x| < 0.1$ .

7. Določi intervale naraščanja in padanja funkcije

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

8. Najdi vse lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x - 2}{1 - x^2}.$$

9. Preuči monotonost funkcije

$$f(x) = xe^{-x}$$

in določi njen globalni maksimum.

10. Določi intervale konveksnosti in točke prevoja funkcije

$$f(x) = x^4 - 4x^2.$$

11. Raziskuj, kje je funkcija

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

konkavna in kje konveksna.

12. Poišči točke prevoja funkcije

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x.$$

13. Nariši graf funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

s pomočjo: ničel, stacionarnih točk, konveksnosti in asimptot.

14. Z analizo odvoda in drugega odvoda preuči graf funkcije

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

15. Raziskuj graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

Določi asimptote, intervale naraščanja/padanja, konveksnost in skiciraj graf.

## 6.6 Odvod v ekonomiji

Odvod ima v ekonomiji izjemno pomembno vlogo, saj omogoča natančno opisovanje sprememb ekonomskih količin. S t. i. *marginalno revolucijo* v 19. stoletju je ekonomija postopoma prešla od opisa agregatnih pojavov k analizi odločanja posameznika, kjer se ključni pojmi - koristnost, stroški, prihodek in dobiček - naravno izražajo kot funkcije ene ali več spremenljivk. Njihovi odvodi pa povedo, kako hitro se te količine spreminjajo. To oblikuje temelje sodobne mikroekonomske analize, od optimizacije proizvodnje do odločanja potrošnikov ter analize tržnih mehanizmov.

V nadaljevanju predstavimo le nekaj izmed mnogih načinov uporabe odvoda v ekonomiji.

### Marginalne funkcije

Naj bo  $y = f(x)$  ekonomska funkcija (npr. stroškov, prihodkov ali koristnosti). Odvod  $f'(x)$  imenujemo *marginalna funkcija*. Njegova vrednost  $f'(x_0)$  opisuje spremembo odvisne količine pri spremembi argumenta  $x$ .

- **Mejni strošek (MC):** Če je  $C(Q)$  skupni strošek proizvodnje količine  $Q$ , je

$$MC(Q) = C'(Q),$$

kar pove, kako se spremeni strošek, če proizvodnjo povečamo za eno enoto.

Primer: pri stroškovni funkciji  $C(Q) = Q^2 + 100 + 0.02Q$  dobimo marginalni strošek

$$C'(Q) = 2Q + 0.02.$$

- **Mejni prihodek (MR):** Če je  $R(Q)$  prihodek, velja

$$MR(Q) = R'(Q).$$

Primer: za  $R(Q) = 680Q - 0.3Q^2$  je

$$MR(Q) = 680 - 0.6Q.$$

- **Mejni dobiček (MP):**

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q), \quad MP(Q) = \Pi'(Q) = MR(Q) - MC(Q).$$

Negativen mejni dobiček *ne pomeni*, da je podjetje v izgubi, temveč da dodatna enota zmanjša povprečni dobiček; skupni dobiček se lahko še vedno povečuje.

### Elastičnosti

Elastičnost meri občutljivost ene ekonomske spremenljivke glede na relativno spremembo druge. Za funkcijo  $y = f(x)$  je *elastičnost* podana z

$$E = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}.$$

- **Cenovna elastičnost povpraševanja:** meri, kako občutljivo se povpraševanje odzove na spremembo cene.
- **Cenovna elastičnost ponudbe:** opisuje, kako se količina ponudbe odzove na spremembo cene.
- **Križna elastičnost:** meri vpliv spremembe cene enega proizvoda na povpraševanje po drugem. V primeru komplementarnih dobrin, kot sta krompirček in ketchup, dobimo negativno elastičnost.
- **Dohodkovna elastičnost:** prikazuje odziv povpraševanja na spremembe dohodkov.

## Optimizacija stroškov in dobička

Mnoga ekonomska vprašanja vodijo do optimizacijskih problemov:

*Pri kateri proizvodnji so stroški najmanjši in pri kateri je dobiček največji?*

Če je cilj minimizirati povprečni strošek

$$AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q},$$

poiščemo stacionarne točke s pogojem

$$AC'(Q) = 0.$$

Primer:

Naj bo  $C(Q) = 27 + 8Q + 3Q^2$ . Potem je

$$AC(Q) = \frac{27}{Q} + 8 + 3Q,$$

odvod

$$AC'(Q) = -\frac{27}{Q^2} + 3,$$

ničla odvoda pa je  $Q = 3$ , kar pomeni, da je pri  $Q = 3$  povprečni strošek najmanjši.

## Upravljanje zalog

Modeli upravljanja zalog pogosto temeljijo na optimizaciji stroškov naročanja in skladiščenja. Naj bo  $H$  velikost naročila. Skupni strošek je tipično

$$U(H) = \frac{PA}{H} + \frac{1}{2}HFL,$$

kjer je  $A$  letna poraba,  $P$  strošek naročila,  $F$  cena enote in  $L$  letna stopnja skladiščenja. Optimalno vrednost dobimo iz pogoja  $U'(H) = 0$ :

$$H^* = \sqrt{\frac{2PA}{F}}.$$

## Mejna koristnost in potrošnikovo odločanje

Če  $U(x)$  označuje koristnost, opisuje odvod  $U'(x)$  mejno koristnost. Klasično načelo pravi:

*Potrošnik maksimira koristnost, ko razmerje cene in mejne koristnosti postane enako za vse dobrine v košarici.*

To vodi do pogojev optimalne potrošnje v teoriji potrošnika.

# Poglavje 7

## Nedoločeni integral

### Uvod

Integralni račun predstavlja pomemben del matematične analize in je v tesnem razmerju z diferencialnim računom. Medtem ko se odvod osredotoča na lokalne spremembe funkcije, integral omogoča razumevanje globalnih lastnosti: površin, akumulacij, povprečij in drugih količin, ki jih opisujemo kot »vsote neizmerno majhnih prispevkov«. Ideja integrala je stara, njene korenine pa segajo že v antično Grčijo, ko je Evdoks iz Knida (408 - 355 pr. n. št.) razvijal metodo izčrpavanja za približevanje ploščin in volumnov. V tem obdobju se je prvič pojavila misel, da je mogoče krivuljo ali lik razstaviti na neskončno mnogo drobnih delcev ter njihove prispevke sešteti v celoto.

Kasneje so se z iskanjem natančnejših postopkov ukvarjali matematiki renesanse in novega veka, med njimi Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 – 1647), ki je oblikoval »načelo enakih presekov«, ter de Fermat, ki je razvil zgodnje tehnike za izračun površin pod grafi funkcij. Pravi preboj pa je nastopil v 17. stoletju z Newtonom in Leibnizem. Oba sta neodvisno razvila sistematičen način integriranja in odvajanja ter odkrila veličastno povezavo med njima - t. i. izrek o zvezi med odvodom in integralom. Z združitvijo idej neskončno majhnih sprememb in neskončnih vsot je nastal temeljni koncept današnjega integralnega računa.

Nedoločeni integral, ki ga v tem poglavju najprej uvedemo, je po svoji naravi operacija iskanja funkcije, katere odvod je znan. Če odvod pove, kako se količina spreminja, potem integral razkrije prvotni potek te količine. Zaradi te tesne zveze je nedoločeni integral pogosto imenovan tudi *anti*odvod. Zapisujemo ga s simbolom

$$\int f(x) dx,$$

kar odraža povrnitev iz odvoda nazaj k izvorni funkciji. Ker odvod katerekoli konstantne funkcije izgine, se pri nedoločenem integralu vedno pojavi aditivna konstanta, t. i. *integracijska konstanta*.

Integralni račun je ključnega pomena tudi v naravoslovnih in tehničnih disciplinah. Pri fiziki integral opisuje delo sile, pot opravljeno pri hitrosti, energijo valovanja in gibanja. V kemiji in biologiji integralni modeli zajemajo zakonitosti hitrosti reakcij,

rast populacij in transport snovi. V ekonomiji integrali omogočajo izračune skupnih stroškov, prihodkov ali akumuliranih tokov, predstavljajo temelj za modeliranje diskontiranih vrednosti, potrošnje in gibanj na finančnih trgih. Skoraj v vseh znanostih integral nastopa kot orodje, ki poveže lokalno obnašanje s celotno sliko.

V tem poglavju bomo uvedli pojem nedoločene integrala, spoznali osnovna pravila za integriranje ter nekaj klasičnih metod, ki nam omogočajo obvladovanje širšega nabora integralov.

## 7.1 Definicija nedoločene integrala

**Definicija 7.1.** Naj bo  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana funkcija. Funkcijo  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$  imenujemo *primitivna funkcija* (ali *antiderivacija*) funkcije  $f$ , če za vsak  $x \in D$  velja

$$F'(x) = f(x).$$

Ker je odvod poljuben aditivni konstantni člen izniči, ni presenetljivo, da ima vsaka funkcija lahko več primitivnih funkcij. Če je  $F$  ena izmed njih, je  $F + C$  za poljubno konstanto  $C \in \mathbb{R}$  prav tako primitivna funkcija funkcije  $f$ . Če drugih funkcij, razen teh, ki se razlikujejo le za konstanto, ni, tedaj pravimo, da je razred teh funkcij *nedoločeni integral* funkcije  $f$ .

**Definicija 7.2.** Naj bo  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. *Nedoločeni integral* funkcije  $f$  je množica vseh njenih primitivnih funkcij in jo označimo z

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

kjer je  $F$  poljubna primitivna funkcija od  $f$ ,  $C \in \mathbb{R}$  pa integracijska konstanta.

Simbol  $\int f(x) dx$  torej ne predstavlja števila, temveč celoten razred funkcij, ki imajo enak odvod. Zapis  $dx$  pri integralnem simbolu označuje spremenljivko integracije in je analogen zapisu pri diferencialu v odvajanju.

*Opomba 26.* Če funkcija  $f$  nima primitivne funkcije na celotnem območju  $D$ , integralna izrazitev  $\int f(x) dx$  ni smiselna. Obstajajo tudi funkcije, ki so povsod zvezne, a njihovih primitivnih funkcij ni mogoče izraziti z elementarnimi funkcijami (npr.  $\int e^{-x^2} dx$ ).

*Primer 7.1.*

- Ker je  $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ , je

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

- Ker velja  $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ , dobimo

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

- Za eksponentno funkcijo velja

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

- Za splošno potenco  $x^n$  ( $n \neq -1$ ) imamo

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

*Opomba 27.* (Opomba o enoličnosti) Če sta  $F$  in  $G$  primitivni funkciji iste funkcije  $f$ , potem sta povezani z enostavno relacijo

$$G(x) = F(x) + C,$$

kar sledi iz izreka o enoličnosti odvoda. Zato zapišemo vse primitivne funkcije z enim samim simbolnim izrazom:  $F(x) + C$ .

## 7.2 Pravila za integriranje

Pri integriranju uporabljamo številna pravila, ki so analogna pravilom za odvajanje, vendar so po strukturi pogosto nekoliko zahtevnejša. Integriranje praviloma ni povsem mehaničen postopek - zahteva razumevanje oblik funkcij, prepoznavanje vzorcev ter uporabo ustreznih metod. V tem podpoglavju navedemo osnovna pravila, ki nam omogočajo reševanje najpogostejših integralov.

### 7.2.1 Linearno pravilo

Integral je linearna operacija. To pomeni, da za vse funkcije  $f, g$  in konstanti  $a, b \in \mathbb{R}$  velja:

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

*Opomba 28.* Linearno pravilo je ključno pri preoblikovanju zapletenih izrazov na enostavnejše člene, ki jih nato integriramo ločeno.

### 7.2.2 Integrali potenc

Za potence spremenljivke  $x$  velja pri  $n \neq -1$ :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Za poseben primer  $n = -1$  dobimo integral funkcije  $1/x$ :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

### 7.2.3 Osnovni integrali elementarnih funkcij

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$$

### 7.2.4 Integrali racionalnih funkcij trigonometričnih izrazov

Za nekatere izraze uporabimo preproste pretvorbe:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + C.$$

### 7.2.5 Integrali vsot in razlik

Če je funkcija zapisana kot vsota ali razlika funkcij, integral razbijemo:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

### 7.2.6 Integrali produktov in kvocientov

Za produkte in kvociente ne obstajajo splošna enostavna pravila, kot pri odvodih. V takih primerih bomo v naslednjem podpoglavju uporabili posebne metode (npr. integracija po delih ali substitucija). Kljub temu sta koristni naslednji opažanji:

- če lahko izraz pred integracijo preoblikujemo v linearno kombinacijo znanih integralov, je najbolje to storiti.
- Pogosto je treba integrand algebraično poenostaviti (razcep polinomov, razširitve, racionalizacije itd.).

*Opomba 29.* Integracijska konstanta se pojavi pri vsakem nedoločenem integralu. Pri zaporednih korakih integracije (npr. ob substituciji) konstanto dodamo na koncu, ko izraz povrnemo v izvirno spremenljivko:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

## 7.3 Integracijske metode

Integriranje pogosto zahteva več kot zgolj poznavanje osnovnih pravil. V številnih primerih integralov ni mogoče izračunati neposredno, zato uporabimo posebne tehnike, ki temeljijo na preoblikovanju izraza v bolj obvladljivo obliko. V tem pod poglavju predstavimo ključne integracijske metode, ki jih bomo uporabljali pri reševanju raznolikih integralov.

### 7.3.1 Metoda substitucije

Substitucija (ali zamenjava spremenljivke) je ena najpogostejših metod integriranja. Temelji na ideji, da izraz  $f(g(x))g'(x)$  prepoznamo kot odvod kompozita in integriramo v novi spremenljivki.

**Izrek 7.1** (Substitucija). Naj bo  $u = g(x)$  odvedljiva funkcija. Tedaj velja:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

*Primer 7.2.* Izračunajmo integral

$$\int (2x + 3)^5 dx.$$

Postavimo  $u = 2x + 3$ , od tod  $du = 2 dx$ , oziroma  $dx = \frac{1}{2} du$ :

$$\int (2x + 3)^5 dx = \int u^5 \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{(2x + 3)^6}{12} + C.$$

*Opomba 30.* Substitucija je še posebej učinkovita pri integralih:

- ki vsebujejo sestavljene funkcije (npr. eksponentne, trigonometrične),
- kjer se del izraza pojavi kot odvod drugega dela,
- racionalnih funkcij, kjer substitucija poenostavi izraz.

### 7.3.2 Integracija po delih

Integracija po delih je obratna operacija verižnega pravila pri odvajanju produkta. Uporabna je pri integralih, kjer imamo produkt funkcij, od katerih je ena ugodna za odvajanje, druga pa za integriranje.

**Izrek 7.2** (Integracija po delih). Naj bosta  $u(x)$  in  $v(x)$  odvedljivi funkciji. Tedaj velja:

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

Pogosteje zapišemo kot:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

*Primer 7.3.* Izračunajmo integral

$$\int xe^x dx.$$

Izberemo  $u = x$  in  $dv = e^x dx$ . Potem je  $du = dx$  in  $v = e^x$ :

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

*Opomba 31.* Integracijo po delih pogosto uporabimo pri:

- produktih polinomov in eksponentnih funkcij,
- produktih polinomov in trigonometričnih funkcij,
- logaritmski in arctan funkciji (ki ju ni mogoče integrirati neposredno).

### 7.3.3 Racionalne funkcije

Racionalne funkcije so količniki polinomov. Njihovo integriranje zahteva predvsem algebrainske postopke: deljenje polinomov, razcep na parcialne ulomke ter preoblikovanje v standardne oblike. Metode so skladne s pristopom iz univerzitetnih gradiv o integralih.

#### 1. Deljenje polinomov

Če je  $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ , najprej izvedemo deljenje:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Integral nato razbijemo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

## 2. Razcep na parcialne ulomke

Najpogostejše oblike razcepov:

- Za različne linearne faktorje:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

- Za večkratne linearne faktorje:

$$\frac{1}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

- Za kvadratne nerazcepne faktorje:

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}.$$

Vsak člen integralov razcepimo v oblike, ki jih že znamo integrirati.

*Primer 7.4.*

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{3x + 5}{(x + 1)^2} dx.$$

Zapišemo kot:

$$\frac{3x + 5}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2}.$$

Dobimo  $A = 3$ ,  $B = 2$ , zato:

$$\int \frac{3}{x + 1} dx + \int \frac{2}{(x + 1)^2} dx = 3 \ln |x + 1| - \frac{2}{x + 1} + C.$$

### 7.3.4 Trigonometrične substitucije

Trigonometrične substitucije uporabimo pri integralih, kjer se v integrandu pojavljajo izrazi oblike:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Osnovne zamenjave so:

$$\begin{array}{ll} x = a \sin \theta, & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta, \\ x = a \sec \theta, & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta, \\ x = a \tan \theta, & \sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta. \end{array}$$

Primer 7.5. Izračunajmo integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Postavimo  $x = 2 \sin \theta$ ,  $dx = 2 \cos \theta d\theta$ :

$$\int \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \theta + C.$$

Ker je  $x = 2 \sin \theta$ , dobimo  $\theta = \arcsin(x/2)$ :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

### 7.3.5 Metode za zahtevnejše izraze

Poznamo dodatne tehnike reševanja integralov:

- racionalizacija korenov (uporabno pri integralih s koreni linearnih funkcij),
- pretvorbe trigonometričnih funkcij v osnovne oblike (npr. z uporabo identitet  $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ),
- integracija racionalnih funkcij trigonometričnih izrazov s substitucijo  $t = \tan(x/2)$  (Weierstrassova substitucija),
- integrali, ki vodijo na arctan ali arctanh funkcijo pri kvadratnih izrazih,
- standardizacija izrazov po popolnem kvadratu.

### Naloge

1. Izračunaj integral:

$$\int (3x^2 - 5x + 2) dx.$$

2. Določi nedoločeni integral:

$$\int \left( \frac{1}{x} + 4x^3 \right) dx.$$

3. Izračunaj:

$$\int e^{2x} dx.$$

4. Izračunaj integral s substitucijo:

$$\int (2x + 1)e^{x^2+x} dx.$$

5. Izračunaj integral:

$$\int \frac{5}{x^2 + 4} dx.$$

6. Uporabi integracijo po delih:

$$\int x \cos x dx.$$

7. Izračunaj integral:

$$\int x e^{-x} dx.$$

8. Razdeli na parcialne ulomke in izračunaj:

$$\int \frac{7x + 3}{x^2 - 4} dx.$$

9. Izračunaj integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx.$$

10. Izračunaj integral:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx.$$

11. Izračunaj integral racionalne funkcije:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

12. Izvedi trigonometrično substitucijo:

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx.$$

13. Izračunaj integral:

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx.$$

14. Izvedi integracijo po delih:

$$\int \ln x dx.$$

15. Izračunaj integral:

$$\int \frac{dx}{(x - 3)^2(x + 1)}.$$



# Poglavje 8

## Določeni integral

### Uvod

Določeni integral je eno osrednjih orodij matematične analize, saj formalizira idejo *akumulacije* oziroma seštevanja neskončno majhnih prispevkov. Geometrijsko ga razumemo kot (predznačeno) ploščino pod grafom funkcije na danem intervalu, analitično pa kot limito ustreznih vsot. Prav ta dvojna narava - geometrijska in analitična - omogoča izjemno široko uporabnost: integrali merijo delo in energijo v fiziki, maso in naboj v naravoslovju, pa tudi skupne stroške, prihodke, presežke in porazdelitve v ekonomiji.

Zgodovinsko se je potreba po takšni formalizaciji pojavila že v antiki pri problemih ploščin in prostornin (Evdoksova metoda izčrpavanja, Arhimed). V 17. stoletju sta Newton in Leibniz v okviru infinitezimalnega računa prepoznala povezavo med integriranjem in odvajanje, ki jo danes povzamemo v Newton–Leibnizovi formuli. Kasneje je Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) podal strogo definicijo integrala preko limit vsot, Jean-Gaston Darboux (1842–1917) pa ekvivalentno definicijo preko spodnjih in zgornjih vsot. S tem je bil integral postavljen na trdne temelje moderne matematične analize.

V ekonomiji določeni integral nastopa kot standardno orodje za prehod iz *mejnih* (*marginalnih*) veličin v *skupne* (*totalne*): iz mejnih stroškov dobimo skupne stroške, iz mejnih prihodkov skupne prihodke, iz razlike med ponudbeno in povpraševalno krivuljo pa potrošniški in proizvajalčev presežek.

### 8.1 Delitve intervala in integralske vsote

Naj bo  $[a, b]$  zaprt interval in  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omejena funkcija.

**Definicija 8.1** (Delitev intervala). *Delitev* intervala  $[a, b]$  je končno naraščajoče zaporedje točk

$$D : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Dolžino podintervala označimo z  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Delitev  $D'$  je *finjša* od  $D$ , če vsebuje vse točke delitve  $D$ .

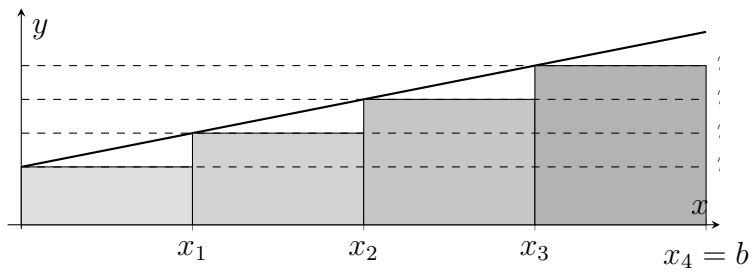
**Definicija 8.2** (Spodnja in zgornja Darbouxova vsota). Za delitev  $D$  definiramo:

$$m_k = \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k = \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

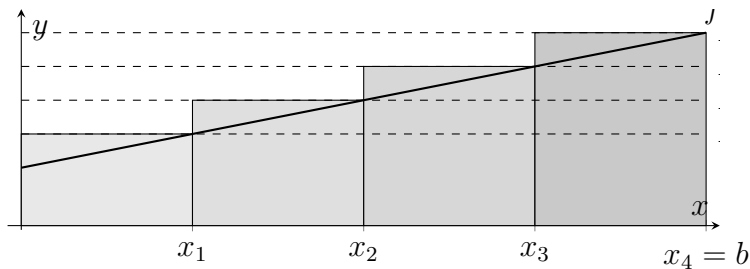
ter *spodnjo* in *zgornjo vsoto*

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S(f, D) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k.$$

Intuitivno  $s(f, D)$  podcenjuje,  $S(f, D)$  pa precenjuje ploščino pod grafom funkcije.



Slika 8.1: Spodnja Darbouxova vsota  $s(f, D)$ .



Slika 8.2: Zgornja Darbouxova vsota  $S(f, D)$ .

## 8.2 Darbouxov integral in integrabilnost

**Definicija 8.3** (Spodnji in zgornji integral). Množica vseh spodnjih vsot je navzgor omejena, množica vseh zgornjih vsot pa navzdol omejena, zato definiramo

$$\underline{\int}_a^b f(x) dx = \sup\{s(f, D); D \text{ delitev } [a, b]\},$$

$$\overline{\int}_a^b f(x) dx = \inf\{S(f, D); D \text{ delitev } [a, b]\}.$$

**Definicija 8.4** (Darbouxova integrabilnost). Funkcija  $f$  je (*Darbouxovo*) *integrabilna* na  $[a, b]$ , če velja

$$\underline{\int}_a^b f(x) dx = \overline{\int}_a^b f(x) dx.$$

Skupno vrednost imenujemo *določeni integral* in jo označimo z

$$\int_a^b f(x) dx.$$

**Izrek 8.1** (Kriterij integrabilnosti). Omejena funkcija  $f$  je integrabilna na  $[a, b]$  natanko tedaj, ko za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja delitev  $D$  intervala  $[a, b]$ , da je

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

*Dokaz.* Ideja dokaza je sledeča. Če sta spodnji in zgornji integral enaka, lahko z dovolj fino delitvijo spodnjo vsoto približamo od spodaj in zgornjo od zgoraj tako, da je njuna razlika manjša od poljubnega  $\varepsilon$ . Obratno, če za vsak  $\varepsilon$  obstaja delitev  $s$  tako majhno razliko, sta  $\sup s(f, D)$  in  $\inf S(f, D)$  prisiljena sovpadati, zato integral obstaja.  $\square$

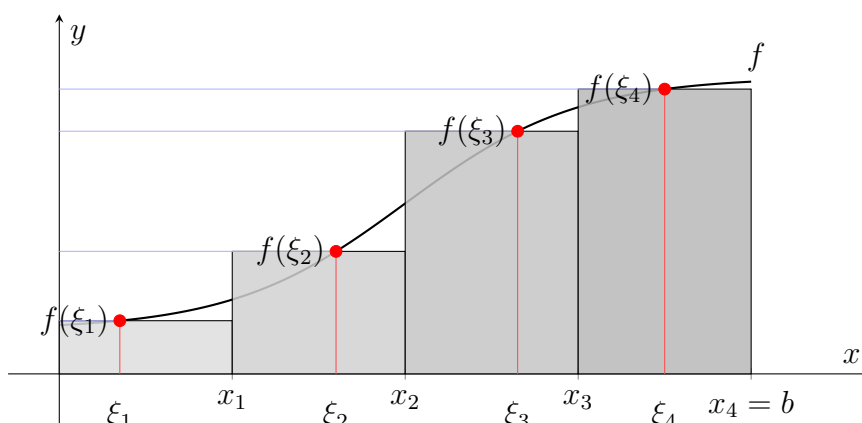
**Izrek 8.2** (Zadostni pogoji integrabilnosti). Vsaka zvezna funkcija na  $[a, b]$  je integrabilna. Integrabilna je tudi vsaka monotona funkcija na  $[a, b]$  ter vsaka odsekoma zvezna funkcija.

## 8.3 Riemannov integral

Darbouxova definicija je ekvivalentna Riemannovi, ki jo dobimo z izbiro točk v podintervalih.

**Definicija 8.5** (Riemannova vsota). Naj bo  $D$  delitev  $[a, b]$  in naj bo  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ . Riemannova vsota je

$$R(f, D, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$



Slika 8.3: Riemannova vsota za delitev  $D$  z izbranimi točkami  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

**Definicija 8.6** (Riemannova integrabilnost). Funkcija  $f$  je *Riemannovo integrabilna* na  $[a, b]$ , če obstaja število  $I$  tako, da za vsako  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$  z lastnostjo: če je delitev  $D$  taka, da je  $\max_k \Delta x_k < \delta$ , potem za vsako izbiro točk  $\xi_k$  velja

$$|R(f, D, \{\xi_k\}) - I| < \varepsilon.$$

Tedaj pišemo

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

**Izrek 8.3** (Ekvivalenca Riemannove in Darbouxove integrabilnosti). Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omejena funkcija. Potem je  $f$  Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je Darbouxovo integrabilna. V tem primeru sta integrala enaka:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\underline{a}}^b f(x) dx = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx.$$

*Dokaz.* Dokaz razdelimo na dve smeri.

(A) Riemannova integrabilnost  $\Rightarrow$  Darbouxova integrabilnost.

Predpostavimo, da je  $f$  Riemannovo integrabilna in naj bo

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

njena Riemannova vrednost. Ker je  $f$  Riemannovo integrabilna, je omejena. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Po definiciji Riemannove integrabilnosti obstaja  $\delta > 0$ , da za vsako delitev  $D = \{x_k\}_{k=0}^n$  intervala  $[a, b]$  z normo  $|D| = \max_k \Delta x_k < \delta$  in za vsako izbiro točk  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  velja

$$|R(f, D, \{\xi_k\}) - I| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1)$$

Fiksirajmo takšno delitev  $D$ . Označimo  $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$ ,  $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$  ter spodnjo in zgornjo vsoto

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \quad S(f, D) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k.$$

Za vsako Riemannovo vsoto velja osnovna neenakost

$$s(f, D) \leq R(f, D, \{\xi_k\}) \leq S(f, D). \quad (2)$$

Ker je  $M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$ , za vsak  $k$  lahko izberemo točko  $\xi_k^+ \in [x_{k-1}, x_k]$  tako, da

$$f(\xi_k^+) > M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Naj bo  $T^+ = \{\xi_k^+\}$  podrejena množica točk. Tedaj

$$R(f, D, T^+) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^+) \Delta x_k > \sum_{k=1}^n \left( M_k - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) \Delta x_k = S(f, D) - \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3)$$

Po (1) je hkrati  $R(f, D, T^+) < I + \varepsilon/4$ , zato iz (3) sledi

$$S(f, D) < I + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Podobno, ker je  $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$ , za vsak  $k$  izberemo  $\xi_k^- \in [x_{k-1}, x_k]$  tako, da

$$f(\xi_k^-) < m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Za  $T^- = \{\xi_k^-\}$  dobimo

$$R(f, D, T^-) < \sum_{k=1}^n \left( m_k + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) \Delta x_k = s(f, D) + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (5)$$

Po (1) je  $R(f, D, T^-) > I - \varepsilon/4$ , zato iz (5) sledi

$$s(f, D) > I - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Iz (4) in (6) dobimo

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Ker je to res za poljubno  $\varepsilon > 0$ , po Darbouxovem kriteriju integrabilnosti sledi, da je  $f$  Darbouxovo integrabilna. Poleg tega iz (4) in (6) vidimo, da se  $s(f, D)$  in  $S(f, D)$  pri drobnejših delitvah približujeta k istemu številu  $I$ , zato je Darbouxov integral enak  $I$ .

(B) Darbouxova integrabilnost  $\Rightarrow$  Riemannova integrabilnost.

Naj bo sedaj  $f$  Darbouxovo integrabilna in naj bo

$$J = \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b f(x) dx}$$

njena skupna Darbouxova vrednost. Naj bo  $\varepsilon > 0$ . Po Darbouxovem kriteriju obstaja delitev  $D$  intervala  $[a, b]$ , da je

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon. \quad (7)$$

Za poljubno izbiro točk  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  pripadajoča Riemannova vsota zadošča neenakosti (2), torej

$$s(f, D) \leq R(f, D, \{\xi_k\}) \leq S(f, D).$$

Ker velja  $s(f, D) \leq J \leq S(f, D)$ , iz (7) sledi

$$|R(f, D, \{\xi_k\}) - J| \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

To pomeni, da so vse Riemannove vsote za dovolj fino delitev poljubno blizu  $J$ , zato je  $f$  Riemannovo integrabilna in njen Riemannov integral je enak  $J$ .

S tem sta obe smeri dokazani. □

## 8.4 Osnovne lastnosti določenega integrala

**Izrek 8.4** (Linearnost). Če sta  $f$  in  $g$  integrabilni na  $[a, b]$  in  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , potem je  $\alpha f + \beta g$  integrabilna in velja

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

**Izrek 8.5** (Aditivnost po intervalu). Če je  $c \in [a, b]$  in je  $f$  integrabilna, potem

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Izrek 8.6** (Monotonost). Če sta  $f$  in  $g$  integrabilni in  $f(x) \leq g(x)$  za vsak  $x \in [a, b]$ , potem

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**Izrek 8.7** (Ocena z absolutno vrednostjo). Če je  $f$  integrabilna, potem je integrabilna tudi  $|f|$  in velja

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Izrek 8.8.** Če v določenem integralu zamenjamo meji integracije, se vrednost integrala spremeni v svojo nasprotno vrednost:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

**Izrek 8.9.** Če sta spodnja in zgornja meja integracije enaki, je vrednost določenega integrala enaka nič:

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

*Primer 8.1.* Izračunajmo

$$\int_0^\pi x \sin x dx.$$

Uporabimo integracijo po delih ( $u = x$ ,  $dv = \sin x dx$ ). Dobimo

$$\int_0^\pi x \sin x dx = (-x \cos x) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi.$$

*Primer 8.2* (Osnovni izračun z Newton–Leibnizovo formulo). Izračunaj določen integral

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx.$$

Najprej poiščemo primitivno funkcijo:

$$\int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

Po Newton–Leibnizovi formuli dobimo

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) dx = [x^3 - 2x^2 + x]_0^2 = (8 - 8 + 2) - 0 = 2.$$

*Primer 8.3* (Zamenjava spremenljivke v določenem integralu). Izračunaj integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx.$$

Uporabimo zamenjavo spremenljivke  $u = 2x$ , tedaj je  $du = 2 dx$  oziroma  $dx = \frac{1}{2} du$ . Meji se spremenita v  $u(0) = 0$  in  $u(\pi/2) = \pi$ . Zato

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \frac{1}{2} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{1}{2} (-\cos \pi + \cos 0) = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.$$

## 8.5 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

**Izrek 8.10** (Osnovni izrek integralnega računa). Naj bo  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in definirajmo funkcijo

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Tedaj je  $F$  zvezna na  $[a, b]$  in odvedljiva na  $(a, b)$  ter velja

$$F'(x) = f(x).$$

Če je  $\Phi$  poljubna primitivna funkcija funkcije  $f$ , potem

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

To imenujemo *Newton–Leibnizova formula*.

*Dokaz.* Prvi del sledi iz definicije  $F$  in kriterija povprečne vrednosti: razlika  $F(x+h) - F(x)$  je integral  $f$  na kratkem intervalu  $[x, x+h]$ , zato je

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \rightarrow f(x),$$

ko gre  $h \rightarrow 0$ , zaradi zveznosti  $f$ . Drugi del dobimo z uporabo prvega dela na primitivni funkciji  $\Phi$  in lastnosti aditivnosti integrala po intervalu. □

*Primer 8.4.* Naj bo  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Ker je  $f$  zvezna na  $[0, \sqrt{3}]$ , lahko uporabimo Newton–Leibnizovo formulo:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}.$$

Newton–Leibnizova formula zahteva, da je  $f$  na  $[a, b]$  zvezna (ali vsaj integrabilna in da obstaja primitivna funkcija, zvezna na celem intervalu). Če je v intervalu točka nedoločenosti, formula ne velja.

*Primer 8.5.* Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

ni definiran kot določeni integral, saj funkcija ni omejena niti definirana v  $x = 0$ . Zato je zapis

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{-1}^1$$

napačen.

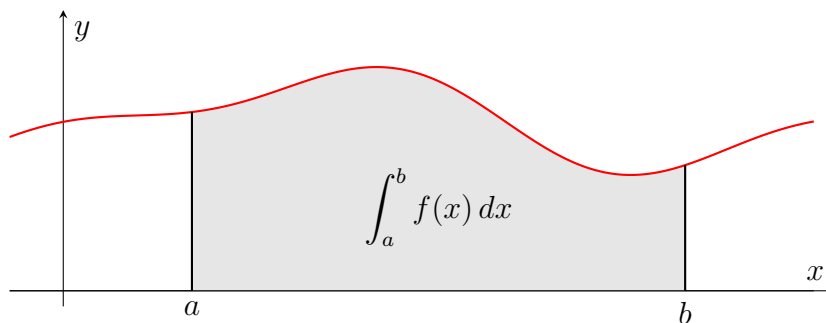
## 8.6 Uporaba določenega integrala

Določeni integral ima številne geometrijske in fizikalne interpretacije, ki nam omogočajo računanje ploščin, dolžin, prostornin in površin. V tem podpoglavju predstavimo tri najpomembnejše uporabe: ploščino pod krivuljo, dolžino loka krivulje ter prostornino in površino rotacijskih teles.

### 8.6.1 Ploščina lika pod krivuljo

Naj bo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ne-negativna zvezna funkcija. Ploščino lika, omejenega z grafom funkcije  $f$ ,  $x$ -osjo ter navpičnima premicama  $x = a$  in  $x = b$ , določimo kot določen integral

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$



Slika 8.4: Ploščina pod grafom funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

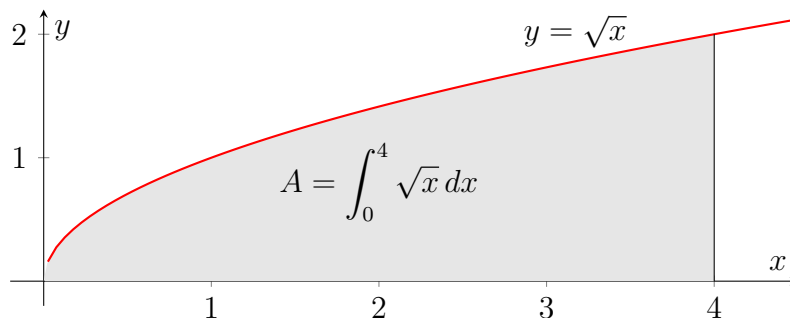
**Izrek 8.11** (Ploščina pod krivuljo). Če je  $f$  zvezna in  $f(x) \geq 0$  za vsak  $x \in [a, b]$ , je ploščina lika pod grafom  $f$  enaka

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

*Dokaz.* Ker je  $f$  na  $[a, b]$  zvezna in nenegativna, je integrabilna. Za vsako delitev  $D$  spodnje Darbouxove vsote podcenjujejo, zgornje pa preceňujejo ploščino lika pod grafom. V limiti, ko delitev postane poljubno fina, na podlagi Darbouxove definicije integrala dobimo, da je integral enak dejanski ploščini.  $\square$

*Primer 8.6.* Izračunaj ploščino pod grafom  $f(x) = \sqrt{x}$  na intervalu  $[0, 4]$ .

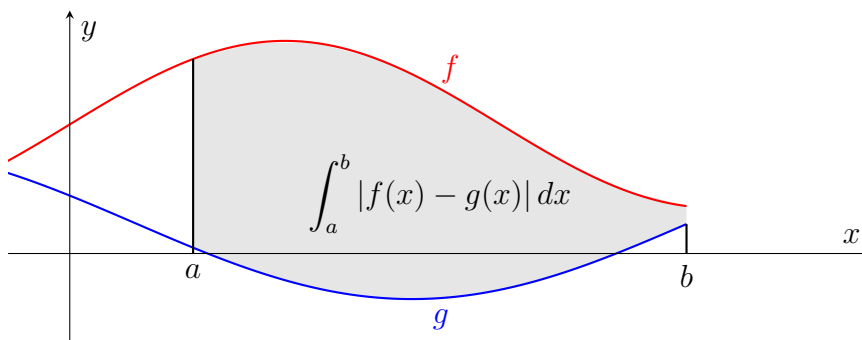
$$A = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$



Slika 8.5: Ploščina pod grafom  $f(x) = \sqrt{x}$  na intervalu  $[0, 4]$ .

**Posledica 8.1.** Naj bosta  $f$  in  $g$  zvezni funkciji na intervalu  $[a, b]$ . Ploščina lika med grafoma  $f$  in  $g$  na intervalu  $[a, b]$  je enaka

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



Slika 8.6: Ploščina lika med grafoma funkcij  $f$  in  $g$  na intervalu  $[a, b]$ .

*Primer 8.7.* Določi ploščino lika med grafoma kvadratnih funkcij

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = -x^2 + 4x + 3.$$

Najprej določimo presečišča grafov, saj ta določajo meje integracije. Rešimo enačbo

$$f(x) = g(x) : \quad x^2 + 2x + 1 = -x^2 + 4x + 3.$$

Prenesemo vse na levo stran:

$$2x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Delimo z 2:

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Rešitvi kvadratne enačbe sta

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Označimo

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Na intervalu  $[a, b]$  velja  $g(x) > f(x)$  (zgornja funkcija je  $g$ ). Zato je ploščina lika

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Izračunamo razliko:

$$g(x) - f(x) = (-x^2 + 4x + 3) - (x^2 + 2x + 1) = -2x^2 + 2x + 2.$$

Sedaj integriramo:

$$A = \int_a^b (-2x^2 + 2x + 2) dx.$$

Primitivna funkcija je

$$\int (-2x^2 + 2x + 2) dx = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x.$$

Izračunamo določeni integral:

$$A = \left[ -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_a^b.$$

Ker sta meji simetrični glede na  $\frac{1}{2}$  in polinom je enostaven, dobimo po vstavitvi spodnje in zgornje meje, ploščino  $A$  med krivuljama na intervalu  $[a, b]$ :

$$A = \frac{8}{3}.$$

**Definicija 8.7.** Naj bo  $f$  integrabilna na intervalu  $[a, b]$ , kjer  $a < b$ . Število

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

imenujemo *povprečna vrednost funkcije  $f$  na  $[a, b]$* .

Recimo, da je funkcija  $f$  pozitivna. Zgornji izraz lahko zapišemo tudi drugače:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a),$$

pri čemer je leva stran enaka ploščini pod grafom funkcije  $f$ . Torej je  $\mu$  višina pravokotnika, katerega ploščina  $\mu(b-a)$  je enaka ploščini lika pod grafom funkcije  $f$  na intervalih  $[a, b]$ .

**Izrek 8.12** (Povprečna vrednost funkcije). Če je  $f$  zvezna funkcija na  $[a, b]$ , potem obstaja takšna točka  $c \in [a, b]$ , da velja

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

### 8.6.2 Dolžina loka

Dolžino loka krivulje  $y = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  določimo kot limito dolžin lomljenih črt, ki konvergirajo h krivulji. Rezultat je znan izrek o dolžini loka.

**Izrek 8.13** (Dolžina loka funkcije). Naj bo  $f$  zvezno odvedljiva na  $[a, b]$ . Tedaj je dolžina loka krivulje  $y = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  enaka

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Ideja dokaza.* Krivuljo aproksimiramo z lomljeno črto čez točke delitve  $D$ :

$$L(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Z uporabo povprečne vrednosti in limite delitev, ki postanejo poljubno fine, ter dejstva (Lagrangeov izrek o srednji vrednosti), da za zvezno odvedljivo funkcijo  $f \in C^1([a, b])$  velja

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

dobimo formulo integrala. □

*Primer 8.8.* Izračunaj dolžino loka funkcije  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  na intervalu  $[0, 2]$ .

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + x^2} dx = \left[ \frac{1}{2}x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1}(x) \right]_0^2.$$

Za  $x = 2$  dobimo

$$L = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

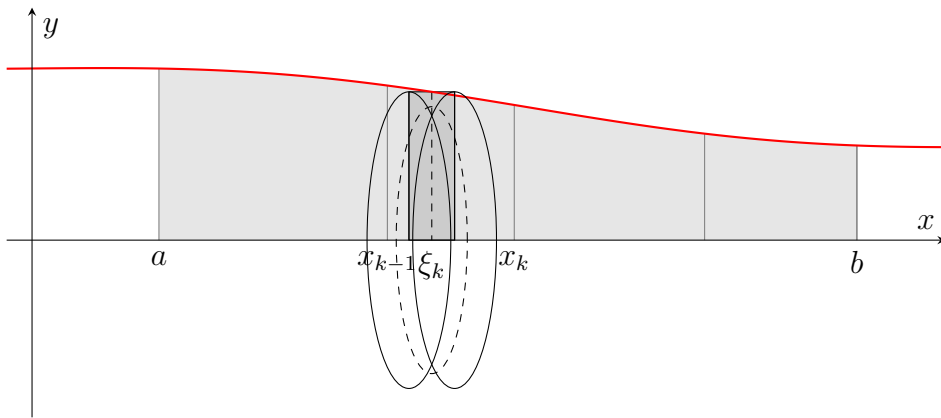
### 8.6.3 Prostornina rotacijskega telesa

Ko krivuljo  $y = f(x)$  zavrtimo okoli osi, dobimo rotacijsko telo. Njegovo prostornino lahko izračunamo s pomočjo določenega integrala.

**Izrek 8.14** (Prostornina rotacijskega telesa okoli  $x$ -osi). Če je  $f$  nenegativna in zvezna na  $[a, b]$ , potem je prostornina telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa  $y = f(x)$  okoli  $x$ -osi, enaka

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

*Dokaz.* Telo razdelimo na tanke valjaste diske debeline  $\Delta x$  in polmera  $f(x)$ . Prostornina vsakega diska je približno  $\pi f(x)^2 \Delta x$ . V limiti delitev dobimo Newton–Leibnizov integral zgornje oblike.  $\square$



Slika 8.7: Prikaz prispevka posameznega člena Riemannove vsote in rotacijskega volumna.

*Primer 8.9.* Izračunaj prostornino telesa, ki nastane z vrtenjem grafa  $f(x) = x$  okoli  $x$ -osi na intervalu  $[0, 3]$ .

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \pi \cdot 9 = 9\pi.$$

### 8.6.4 Površina rotacijskega telesa

Če krivuljo  $y = f(x)$  zavrtimo okoli osi, dobimo ne le prostornino, temveč tudi površino nastalega telesa.

**Izrek 8.15** (Površina rotacijskega telesa okoli  $x$ -osi). Naj bo  $f$  pozitivna in  $C^1$  na  $[a, b]$ . Površina telesa, dobljenega z rotacijo krivulje  $y = f(x)$  okoli  $x$ -osi, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

*Ideja dokaza.* Krivuljo razdelimo na majhne dele dolžine  $\Delta s$ , ki se z vrtenjem okoli osi pretvorijo v trakove s približno površino

$$\Delta S \approx 2\pi f(x) \Delta s.$$

V limiti  $\Delta s \rightarrow 0$  dobimo formulo iz izreka.  $\square$

*Primer 8.10.* Izračunaj površino telesa, dobljenega z vrtenjem grafa  $f(x) = x$  na intervalu  $[1, 3]$  okoli  $x$ -osi.

$$S = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 + 1} dx = 2\pi \sqrt{2} \int_1^3 x dx = 2\pi \sqrt{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^3 = 2\pi \sqrt{2} \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 8\pi \sqrt{2}.$$

## 8.7 Določeni integral v ekonomiji

Določen integral ima v ekonomiji pomembno vlogo, saj omogoča kvantitativni opis številnih procesov, pri katerih se določena količina kopiči, spreminja ali kumulira skozi čas, proizvodnjo ali količino dobrin. Medtem ko odvod opisuje marginalne (mejne) spremembe, določeni integral zajame skupni učinek teh sprememb na danem intervalu in tako omogoča merjenje celotne proizvodnje, stroškov, prihodkov ali koristi.

V nadaljevanju navajamo nekatera ključna področja uporabe določenega integrala v ekonomiji.

### Skupni stroški proizvodnje

Če je  $MC(q)$  mejni strošek proizvodnje pri količini  $q$ , potem je skupni strošek na intervalu  $[0, Q]$  enak

$$TC(Q) = \int_0^Q MC(q) dq.$$

Integral tako omogoča pretvorbo mejnih stroškov v celotne stroške.

### Skupni prihodki

Če je cena odvisna od količine,  $p(q)$ , in je funkcija prihodka  $R(q) = p(q) \cdot q$ , potem je skupni prihodek v intervalu  $[0, Q]$  enak

$$\int_0^Q p(q) dq.$$

To je posebej pomembno pri monopolnih trgih, kjer se cena prilagaja količini.

### Potrošnikov presežek

Povpraševanje  $p_D(q)$  opisuje najvišjo ceno, ki bi jo bili potrošniki pripravljene plačati. Potrošnikov presežek na intervalu  $[0, Q]$  je

$$CS = \int_0^Q p_D(q) dq - p^*Q,$$

kjer  $p^*$  označuje dejansko tržno ceno. Integral meri celotno korist potrošnikov.

### Proizvajalčev presežek

Če  $p_S(q)$  označuje ponudbeno ceno oziroma minimalno ceno proizvajalca, je proizvajalčev presežek

$$PS = p^*Q - \int_0^Q p_S(q) dq.$$

## Dinamika kapitala in rasti

Pri kontinuirani obrestni meri  $r(t)$  se vrednost kapitala v času izračuna z integralom:

$$A(T) = A_0 \exp\left(\int_0^T r(t) dt\right).$$

Integral meri akumulacijo rasti skozi čas.

## Skupna produktivnost ali akumulirani vložki

Če  $f(t)$  opisuje hitrost proizvodnje ali porabe virov, je celotna količina, proizvedena v času  $[0, T]$ ,

$$\int_0^T f(t) dt.$$

## Pričakovana vrednost v ekonomskih modelih

V kontinuiranih verjetnostnih modelih je pričakovana vrednost naključne spremenljivke

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

kar je pomembno pri finančnem odločanju, tveganju in optimizaciji portfeljev.

Določen integral je zato eno izmed ključnih matematičnih orodij ekonomije: omogoča povezavo med marginalnimi spremembami in njihovimi skupnimi učinki ter omogoča analizo številnih pojavov v mikro- in makroekonomiji, od odločanja potrošnikov do proizvodnje, finančne matematike in teorije rasti.

## Naloge

1. Izračunaj določeni integral:

$$\int_0^4 (2x + 1) dx.$$

2. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije

$$f(x) = \sqrt{x}$$

in interval  $[1, 9]$ .

3. Izračunaj:

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx.$$

Kaj lahko opaziš glede sodih/lihkih funkcij?

4. Izračunaj:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

5. Naj bo dana funkcija prihodka

$$R(x) = 200 \ln(x + 1).$$

Določi skupni prihodek, ustvarjen s prodajo med  $x = 0$  in  $x = 20$ .

6. Dano je povpraševanje

$$p(x) = 50 - 2x.$$

Izračunaj potrošnikov presežek na intervalu  $[0, 10]$ .

7. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije

$$f(x) = x^2$$

okoli  $x$ -osi na intervalu  $[0, 3]$ .

8. Izračunaj dolžino loka funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{3/2}$$

na intervalu  $[0, 4]$ .

9. Izračunaj določeni integral:

$$\int_1^e \frac{1}{x} \, dx.$$

Kaj predstavlja vrednost rezultata?

10. Naj bo dana funkcija mejnega stroška

$$MC(q) = 0.02q^2 + 3.$$

Izračunaj skupne stroške proizvodnje  $TC(q)$  na intervalu  $q \in [0, 50]$ . (Namig: uporabi dejstvo, da je  $TC(0) = 0$ .)



# Poglavje 9

## Vektorji

### Uvod

Vektorji sodijo med najosnovnejše matematične pojme, ki se pojavljajo v skoraj vseh naravoslovnih, tehničnih in družboslovnih znanostih. Njihova bistvena značilnost je, da opisujejo količine, pri katerih je za popolno informacijo potrebna tako *velikost* kot tudi *smer*. Med najzgodnejše primere uporabe vektorjev štejeemo obravnavo geometrijskih daljic v grški matematiki, kjer so se že pojavili zametki pojmov, kot sta *prenos v ravnini* in *vzporednost*. Sistematična teorija vektorjev pa se je začela razvijati šele v 19. stoletju, ko sta William Rowan Hamilton (1805–1865) in Hermann Günther Grassmann (1809–1877) uvedla algebraične strukture, iz katerih se je kasneje izoblikovala moderna linearna algebra. V njej vektor ni več nujno predstavljen samo kot usmerjena daljica v ravnini ali prostoru, temveč kot element abstraktnega vektorskega prostora.

V sodobni matematiki in drugih znanostih se vektorji pojavljajo na skoraj vsakem koraku: v fiziki predstavljajo silo, hitrost ali elektromagnetno polje; v računalništvu opisujejo podatkovne strukture, slike ali signale; v ekonomiji pa z njimi zapisujemo npr. košarico dobrin, strukturo proizvodnje ali spremembe več medsebojno povezanih spremenljivk. Zaradi preprostega algebraičnega zapisa lahko vektorje obravnavamo kot urejene  $n$ -terice realnih števil, kar omogoča, da velike in kompleksne probleme prevedemo v zapis, primeren za analitično obravnavo in učinkovito računsko izvedbo.

Osnovni operaciji, ki ju pri vektorjih najprej spoznamo, sta *seštevanje vektorjev* in *množenje vektorja s skalarjem*. Že ti dve operaciji odpirata pot do bistvenih pojmov, kot sta *linearna kombinacija* in *linearna odvisnost*, ki tvorita jedro razumevanja vektorskih prostorov. Na drugi strani pa skalarni, vektorski in mešani produkt omogočajo geometrijsko interpretacijo pojavov: merjenje dolžine, računanje kotov, opisovanje ravnin, normirane ortogonalne osnove in izračunavanje prostornin.

Poglavje, ki sledi, zato uvaja vse temeljne operacije in lastnosti vektorjev v  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ , predstavi idejo linearnih kombinacij ter geometrijski pomen skalarnega, vektorskega in mešanega produkta. Posebej izpostavimo tudi klasične neenakosti, kot sta Schwarzova in trikotniška neenakost, ki tvorita analitično ogrodje vektorskega računa. Na koncu poglavja so zbrane naloge različnih težavnostnih stopenj, s katerimi lahko

bralec utrdi in poglobi razumevanje predstavljenih pojmov.

Vektorji so torej eden ključnih konceptov matematičnega jezika - most med geometrijo, algebro in aplikacijami. Zato njihovo razumevanje predstavlja nujen temelj za nadaljnja poglavja, zlasti za matrike, linearne sisteme in diferenciranje vektorskih funkcij.

## 9.1 Osnovni pojmi

V najširšem smislu vektor predstavimo kot usmerjeno količino, za katero sta pomembni tako velikost kot smer. Geometrijsko si vektor predstavljamo kot usmerjeno daljico  $\overrightarrow{AB}$ , kjer je  $A$  začetna,  $B$  pa končna točka.

**Definicija 9.1.** Naj bosta  $A = (a_1, a_2)$  in  $B = (b_1, b_2)$  točki v ravnini  $\mathbb{R}^2$ . Vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

je usmerjena daljica iz  $A$  v  $B$ . Podobno v prostoru  $\mathbb{R}^3$  definiramo

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Če je začetna točka nepomembna, vektor zapišemo kot urejeni par oziroma trojico realnih števil:

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

**Definicija 9.2.** Vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  sta enaka, če imata enako smer in enako dolžino. Algebraično to pomeni

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_i = b_i \text{ za vse } i.$$

*Opomba 32.* Vektorje pogosto označujemo s krepkimi črkami ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ) ali puščicami nad črkami ( $\vec{a}$ ). V nadaljevanju uporabljamo zapis s puščico.

### Geometrijska interpretacija

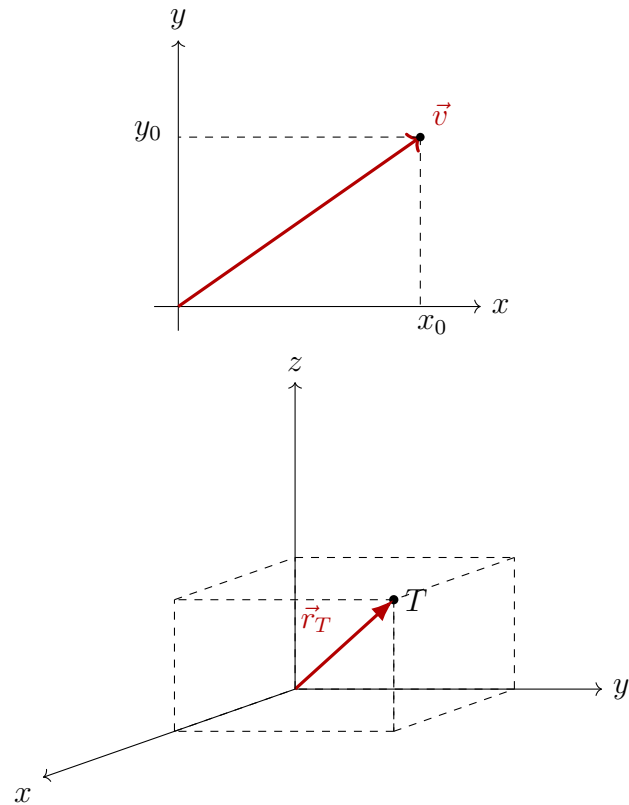
Vektor ima dve temeljni lastnosti:

- smer in
- dolžino.

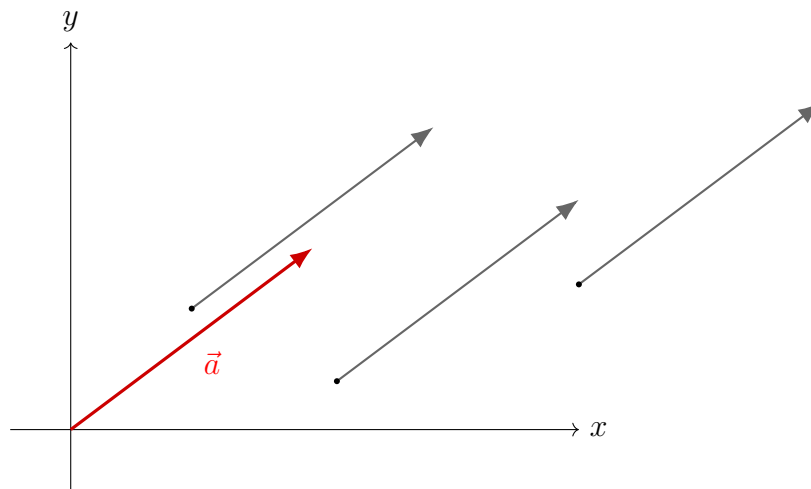
*Primer 9.1.* Za točki  $A(2, -1)$  in  $B(5, 3)$  v  $\mathbb{R}^2$  je

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (3, 4), \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

*Opomba 33.* Vektorja, ki imata isto smer in dolžino, ne glede na lego v ravnini ali prostoru, imenujemo *ekvipolentna*. V sodobni algebri si vektor predstavljamo abstraktno - kot element prostora, ki ga ni nujno vezati na geometrijo.



Slika 9.1: Vektor v ravnini  $\mathbb{R}^2$  (zgoraj) in v prostoru  $\mathbb{R}^3$  (spodaj).



Slika 9.2: Vektor  $\vec{a}$  in trije njemu vzporedni ter enako dolgi vektorji v ravnini  $\mathbb{R}^2$ .

**Definicija 9.3.** Dan je vektor  $\vec{v}$  v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Dolžina (norma) vektorja  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  je

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

## Smerni vektor

Če je dana premica v parametrični obliki

$$\ell : \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{d},$$

je vektor  $\vec{d}$  *smerni vektor* premice.

*Primer 9.2.* Premica skozi točko  $P(1, 2)$  v smeri vektorja  $(3, -1)$  lahko zapišemo v parametrični obliki:

$$(x, y) = (1, 2) + t(3, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Opomba 34.* Smerni vektor ni enoličen - poljubni neničelni skalarni večkratnik določenega smernega vektorja določa isto smer premice.

## 9.2 Operacije z vektorji

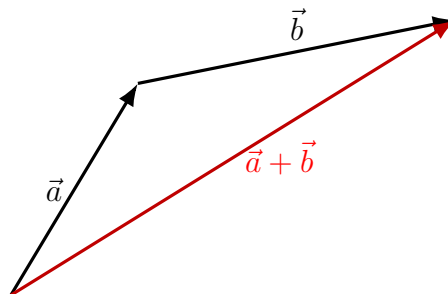
Vektorji v  $\mathbb{R}^n$  tvorijo algebrsko strukturo, v kateri sta osnovni operaciji seštevanje vektorjev in množenje vektorja s skalarjem. Obe operaciji sta definirani po komponentah in zato omogočata enostavno računsko obravnavo.

### 9.2.1 Seštevanje vektorjev

**Definicija 9.4.** Naj bosta  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  in  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vektorja iz  $\mathbb{R}^n$ . Njuno vsoto definiramo po komponentah:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Geometrijsko vsoto vektorjev v  $\mathbb{R}^2$  ali  $\mathbb{R}^3$  dobimo tako, da vektor  $\vec{b}$  vzporedno prenesemo v izhodišče konice vektorja  $\vec{a}$ ; vsota je usmerjena daljica od začetka  $\vec{a}$  do prenesene konice  $\vec{b}$  (pravilo paralelograma).



Slika 9.3: Geometrijska interpretacija seštevanja vektorjev:  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Izrek 9.1.** Za poljubne vektorje  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$  velja:

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (komutativnost),

2.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (asociativnost),
3. obstaja nevtralni element  $\vec{0}$ , da je  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

*Primer 9.3.* Naj bo  $\vec{a} = (2, -1, 3)$  in  $\vec{b} = (-4, 5, 1)$ . Potem je

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 - 4, -1 + 5, 3 + 1) = (-2, 4, 4).$$

### 9.2.2 Odštevanje vektorjev

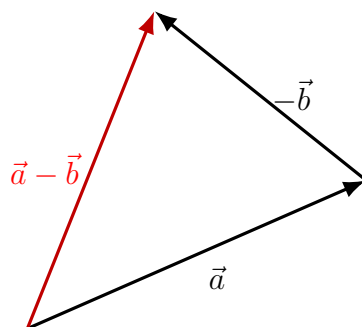
**Definicija 9.5.** Naj bosta  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  in  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vektorja iz  $\mathbb{R}^n$ . Njuno razliko definiramo po komponentah:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n).$$

**Definicija 9.6.** Naj bo  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  vektor iz  $\mathbb{R}^n$ . Nasprotni (negativni) vektor vektorja  $\vec{a}$  je vektor  $-\vec{a}$ , definiran kot

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n).$$

Tako vedno velja  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .



Slika 9.4: Geometrijska interpretacija razlike vektorjev:  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

*Primer 9.4.* Za  $\vec{a} = (1, 3)$  in  $\vec{b} = (4, -2)$  je

$$\vec{a} - \vec{b} = (1 - 4, 3 - (-2)) = (-3, 5).$$

### 9.2.3 Množenje vektorja s skalarjem

**Definicija 9.7.** Naj bo  $\lambda \in \mathbb{R}$  skalar in  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ . Produkt  $\lambda\vec{a}$  je vektor

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

**Izrek 9.2.** Za vse  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  in vse  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  velja:

1.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ,
2.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ,

3.  $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ ,
4. obstaja nevtralni element  $\vec{1}$ , da je  $\vec{1} \cdot \vec{a} = \vec{a}$ .

*Opomba 35.* Množenje s skalarjem je zunanja operacija  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Seštevanje pa je notranja operacija  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Primer 9.5.* Če je  $\vec{a} = (3, -2, 1)$ , potem

$$-2\vec{a} = (-6, 4, -2).$$

### 9.2.4 Skalarni produkt

**Definicija 9.8.** Naj bosta  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  in  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$  vektorja iz  $\mathbb{R}^n$ . Njun *skalarni produkt* definiramo s predpisom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

**Izrek 9.3.** Za vse  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$  in vse  $\lambda \in \mathbb{R}$  velja:

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (komutativnost),
2.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (distributivnost),
3.  $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (homogenost),
4.  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$  in  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ .

*Primer 9.6.* Za  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  in  $\vec{b} = (3, 0, 4)$  je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = -1.$$

**Izrek 9.4.** Naj bosta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  vektorja v  $\mathbb{R}^3$  in  $\varphi$  kot, ki ga oklepata. Tedaj velja

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi.$$

**Posledica 9.1.** Dolžina vektorja  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  je enaka

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

**Posledica 9.2.** Kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  je

$$\varphi = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right).$$

**Posledica 9.3.** Vektorja  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  sta pravokotna natanko tedaj, ko velja

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

*Primer 9.7.* Podana sta vektorja  $\vec{a} = (-3, 4, 2)$  in  $\vec{b} = (-2, 3, 1)$ .

- a) Izračunajmo  $\|\vec{a}\|$  in  $\|\vec{b}\|$ .  
 b) Izračunajmo  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .  
 c) Izračunajmo kot med vektorjema  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ .

a)

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29},$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}.$$

b)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3)(-2) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 12 + 2 = 20.$$

- c) Naj bo  $\varphi$  kot med vektorjema. Po izreku o skalarni produktu velja

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi,$$

zato

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{20}{\sqrt{29} \sqrt{14}} = \frac{20}{\sqrt{406}}.$$

Torej je

$$\varphi = \arccos\left(\frac{20}{\sqrt{406}}\right) \approx 0.122 \text{ rad} \approx 6.98^\circ.$$

### 9.2.5 Vektorski produkt (v $\mathbb{R}^3$ )

V prostoru  $\mathbb{R}^3$  je poleg skalarnega produkta pomembna operacija tudi vektorski produkt, katerega rezultat je nov vektor.

**Definicija 9.9.** Naj bosta  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  in  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vektorja iz  $\mathbb{R}^3$ . Njun *vektorski produkt* je vektor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

**Izrek 9.5.** Za vse  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  in  $\lambda \in \mathbb{R}$  velja:

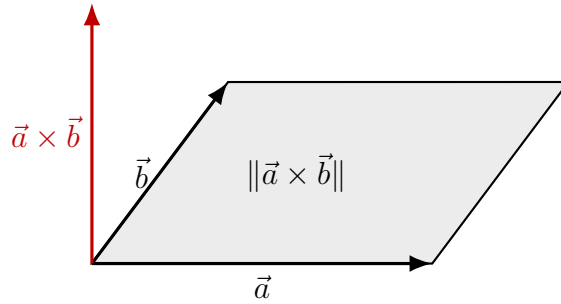
1.  $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ ,
2.  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ ,
3.  $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ ,
4.  $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$  in  $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ .

**Izrek 9.6.** Naj bosta  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  vektorja, ki oklepata kot  $\varphi$ . Tedaj je dolžina vektorskega produkta  $\vec{a} \times \vec{b}$  enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi.$$

*Primer 9.8.* Naj bo  $\vec{u} = (1, 2, 0)$  in  $\vec{v} = (0, 1, 3)$ . Potem je

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1, -(1 \cdot 3 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = (6, -3, 1).$$



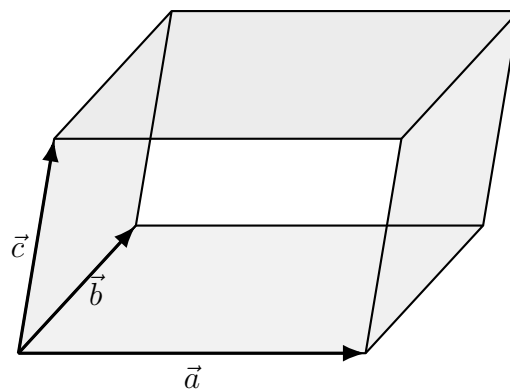
Slika 9.5: Ploščina paralelograma, ki ga oklepata  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ , je enaka  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ .

### 9.2.6 Mešani produkt (v $\mathbb{R}^3$ )

**Definicija 9.10.** Naj bodo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ . Njihov *mešani produkt* je realno število

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

*Opomba 36.* Absolutna vrednost mešanega produkta je enaka prostornini paralelepipedu, ki ga razpenjajo vektorji  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ; predznak pa določa orientacijo.



Slika 9.6: Paralelepiped, ki ga določajo vektorji  $\vec{a}, \vec{b}$  in  $\vec{c}$ .

*Primer 9.9.* Dani so vektorji  $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  in  $\vec{c} = (2, 1, 0)$ . Izračunajmo mešani produkt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Najprej izračunamo

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1, -(0 \cdot 0 - 1 \cdot 2), 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = (-1, 2, -2).$$

Sledi

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, 0, 2) \cdot (-1, 2, -2) = -1 + 0 - 4 = -5.$$

## 9.3 Linearna kombinacija, linearna odvisnost in neodvisnost

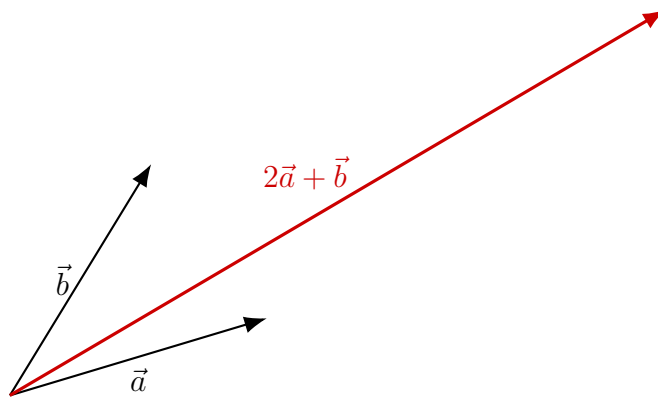
Linearna kombinacija in linearna (ne)odvisnost vektorjev sta temeljna pojma linearne algebre. Njuna geometrijska interpretacija v ravnini in prostoru omogoča intuitivno razumevanje smeri, relacij med vektorji ter vloge vektorskih baz.

**Definicija 9.11.** Naj bodo  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  vektorji v  $\mathbb{R}^n$  in  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$$

imenujemo *linearna kombinacija* vektorjev  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$  s koeficienti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

Vektorji so linearno odvisni, če niso linearno neodvisni.



Slika 9.7: Linearna kombinacija vektorjev v ravnini.

*Opomba 37.* Vektorji so linearno odvisni, če lahko enega izmed njih zapišemo kot linearno kombinacijo preostalih.

**Baza** prostora  $\mathbb{R}^n$  je vsaka množica  $n$  linearno neodvisnih vektorjev iz  $\mathbb{R}^n$ . Vsak vektor iz  $\mathbb{R}^n$  lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

*Primer 9.10.* Vektorji

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

tvorijo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ . Imenujemo jo *standardna baza* prostora  $\mathbb{R}^3$ .

Poleg tega je ta baza tudi *ortonormirana*. To pomeni, da so vektorji med seboj pravokotni (ortogonalni) in enotske dolžine. Natančneje velja:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0,$$

kar pomeni, da so vektorji paroma pravokotni, ter

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1,$$

kar pomeni, da so normirani (dolžine 1 enoto).

Zato velja, da je množica  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  ortonormirana baza prostora  $\mathbb{R}^3$ .

Vsak vektor  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  lahko zato enolično zapišemo kot linearno kombinacijo teh baznih vektorjev:

$$\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}.$$

*Opomba 38.* Poljubna linearno neodvisna vektorja iz  $\mathbb{R}^2$  predstavljata bazo ravnine  $\mathbb{R}^2$ . Poljubni trije vektorji v  $\mathbb{R}^2$  so linearno odvisni.

*Opomba 39.* Poljubni trije linearno neodvisni vektorji iz  $\mathbb{R}^3$  predstavljajo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ . Poljubni štirje vektorji v  $\mathbb{R}^3$  so linearno odvisni.

*Primer 9.11.* Podani so vektorji

$$\vec{a} = (-3, 4, 2), \quad \vec{b} = (-4, 1, 3), \quad \vec{c} = (5, 2, -3), \quad \vec{d} = (-2, 1, 2).$$

- Izračunajmo linearno kombinacijo  $3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} - 5\vec{d}$ .
- Ugotovimo, ali so vektorji  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  in  $\vec{d}$  linearno odvisni.
- Preverimo, ali vektorji  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  in  $\vec{d}$  sestavljajo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ .

- Računamo po komponentah:

$$\begin{aligned} 3\vec{a} &= (-9, 12, 6), & 2\vec{b} &= (-8, 2, 6), \\ -4\vec{c} &= (-20, -8, 12), & -5\vec{d} &= (10, -5, -10). \end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned} 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} - 5\vec{d} &= (-9, 12, 6) + (-8, 2, 6) + (-20, -8, 12) + (10, -5, -10) \\ &= (-27, 1, 14). \end{aligned}$$

- Ugotovimo, ali so vektorji  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  linearno odvisni.

Iščemo skalarje  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , da velja

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{c} + \gamma\vec{d} = \vec{0}.$$

Po komponentah dobimo sistem:

$$\begin{cases} -3\alpha + 5\beta - 2\gamma = 0, \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Iz druge enačbe izrazimo  $\gamma$ :

$$\gamma = -4\alpha - 2\beta.$$

Vstavimo v prvo:

$$-3\alpha + 5\beta - 2(-4\alpha - 2\beta) = 0 \implies -3\alpha + 5\beta + 8\alpha + 4\beta = 0 \implies 5\alpha + 9\beta = 0,$$

torej

$$\alpha = -\frac{9}{5}\beta.$$

Vstavimo  $\gamma = -4\alpha - 2\beta$  še v tretjo enačbo:

$$2\alpha - 3\beta + 2(-4\alpha - 2\beta) = 0 \implies 2\alpha - 3\beta - 8\alpha - 4\beta = 0 \implies -6\alpha - 7\beta = 0,$$

zato

$$\alpha = -\frac{7}{6}\beta.$$

Ker morata biti oba izraza za  $\alpha$  enaka, sledi

$$-\frac{9}{5}\beta = -\frac{7}{6}\beta \implies \beta = 0.$$

Od tod dobimo še  $\alpha = 0$  in iz  $\gamma = -4\alpha - 2\beta$  tudi  $\gamma = 0$ . Ker je edina rešitev trivialna, so vektorji  $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$  **linearno neodvisni**.

c) Preverimo, ali vektorji  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  sestavljajo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ .

Bazo v  $\mathbb{R}^3$  tvorijo natanko trije linearno neodvisni vektorji. Zato preverimo linearno neodvisnost.

Naj bodo  $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{R}$  in naj velja

$$\mu\vec{b} + \nu\vec{c} + \rho\vec{d} = \vec{0}.$$

Po komponentah dobimo:

$$\begin{cases} -4\mu + 5\nu - 2\rho = 0, \\ \mu + 2\nu + \rho = 0, \\ 3\mu - 3\nu + 2\rho = 0. \end{cases}$$

Iz druge enačbe izrazimo  $\rho$ :

$$\rho = -\mu - 2\nu.$$

Vstavimo v prvo:

$$-4\mu + 5\nu - 2(-\mu - 2\nu) = 0 \implies -4\mu + 5\nu + 2\mu + 4\nu = 0 \implies -2\mu + 9\nu = 0,$$

torej

$$\mu = \frac{9}{2}\nu.$$

Vstavimo  $\rho = -\mu - 2\nu$  v tretjo enačbo:

$$3\mu - 3\nu + 2(-\mu - 2\nu) = 0 \implies 3\mu - 3\nu - 2\mu - 4\nu = 0 \implies \mu - 7\nu = 0,$$

zato

$$\mu = 7\nu.$$

Primerjava  $\mu = \frac{9}{2}\nu$  in  $\mu = 7\nu$  da  $\nu = 0$ , od tod pa  $\mu = 0$  in  $\rho = 0$ . Ker je edina rešitev trivialna, so  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  **linearno neodvisni**, zato **sestavljajo bazo** prostora  $\mathbb{R}^3$ .

## 9.4 Vektorji v ekonomiji

V ekonomiji se številne količine ne pojavljajo kot posamezna števila, temveč kot *sklopi podatkov*, ki nastopajo sočasno in vplivajo drug na drugega. Takšne količine naravno predstavimo z vektorji, ki omogočajo hkratno obravnavo več medsebojno povezanih spremenljivk. Vektorji so zato nepogrešljiv matematični pripomoček pri analiziranju večdimenzionalnih ekonomskih pojavov, kot so potrošnja, proizvodnja, cenovne strukture in podatki v makroekonomiji.

Ker vektorji združujejo smer in velikost, lahko z njimi učinkovito opisujemo spremembe, trende, relativne vplive ter odziv ekonomskega sistema na različne šoke ali spremembe parametrov. Algebra vektorjev (seštevanje, linearne kombinacije, skalarni produkt) omogoča strukturirano in kvantitativno obravnavo kompleksnih razmerij, s katerimi se srečujemo v mikro- in makroekonomiji.

### Potrošniški vektorji in potrošniške košarice

Potrošnikovo izbiro pogosto predstavimo z vektorjem količin različnih dobrin, npr.  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Tak zapis omogoča analizo preferenc, indiferenčnih krivulj in optimizacijo pod proračunsko omejitvijo.

### Proizvodne tehnologije in proizvodni vektorji

Proizvodne procese opisujemo z vektorji vhodov (inputov) in izhodov (outputov). Linearne kombinacije vektorjev omogočajo opis proizvodnih možnosti, substitucije med vložki in modeliranje tehnologij z več dejavniki.

### Cenovni vektorji in tržne strukture

Cene dobrin v gospodarstvu tvorijo cenovni vektor  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ . Skalarni produkt  $\vec{p} \cdot \vec{x}$  daje skupno vrednost potrošniške košarice, kar je osnova proračunske omejitve in številnih indeksov cen (CPI, Laspeyres).

### Makroekonomski kazalniki in časovne vrste

BDP, inflacija, zaposlenost, investicije in izvoz so pogosto analizirani kot vektorski podatki v večdimenzionalnih modelih. Vektorske spremembe omogočajo analizo trendov, sočasnih učinkov in odvisnosti med kazalniki.

### Modeli splošnega ravnovesja in input-output analize.

Leontiefovi input-output modeli temeljijo na vektorskem zapisu proizvodnih potreb in medsebojnih odvisnosti sektorjev. Matrično-vektorski zapis omogoča neposredno reševanje učinkov šokov (npr. povečanje povpraševanja v enem sektorju) na celotno gospodarstvo.

## Portfeljska analiza in finančni trgi

Donosnosti in tveganja portfelja predstavimo z vektorji, pri čemer skalarni produkti in norme omogočajo izračun volatilitosti, kovarianc ter optimizacijo portfeljev (Markowitzov model).

## Elastičnost in mejni učinki

V večdimenzionalni analizi povpraševanja ali proizvodnje vektorji sprememb omogočajo merjenje mejnih učinkov, substitucijskih elastičnosti in odziva več spremenljivk hkrati.

Vektorji so torej naraven jezik za opis kompleksnih ekonomskih pojavov. Omogočajo kompaktno zapisovanje modelov, učinkovito računsko obravnavo in tudi geometrijsko interpretacijo odnosov med ekonomskimi spremenljivkami.

## Naloge

1. Naj bodo  $\vec{a} = (2, -1, 4)$ ,  $\vec{b} = (-3, 5, 1)$ . Izračunaj  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - 2\vec{b}$  in  $3\vec{a} - \vec{b}$ .
2. Izračunaj dolžini vektorjev  $\vec{u} = (3, 4)$  in  $\vec{v} = (-2, 5)$  ter kot med njima.
3. Dokaži, da sta vektorja  $\vec{p} = (1, 2, 1)$  in  $\vec{q} = (3, 6, 3)$  linearno odvisna.
4. Naj bo  $\vec{a} = (3, 1, -2)$  in  $\vec{b} = (-1, 4, 0)$ . Izračunaj skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  in določi kot med njima.
5. Izračunaj vektorski produkt  $\vec{a} \times \vec{b}$  za  $\vec{a} = (1, -1, 2)$  in  $\vec{b} = (0, 3, -1)$ .
6. Naj bodo  $\vec{a} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 3)$  in  $\vec{c} = (0, 2, 1)$ . Izračunaj mešani produkt  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$  in določi volumen paralelepipeda, ki ga razpenjajo.
7. Preveri, ali so vektorji

$$\vec{a} = (1, 2), \quad \vec{b} = (3, -1), \quad \vec{c} = (5, 3)$$

linearno odvisni ali neodvisni.

8. Naj bo dana linearna kombinacija

$$\vec{v} = 4\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c},$$

kjer je  $\vec{a} = (1, 0, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, 3, 1)$ ,  $\vec{c} = (0, 2, -2)$ . Izračunaj vektor  $\vec{v}$ .

9. V ravnini sta podana vektorja  $\vec{a} = (4, 1)$  in  $\vec{b} = (2, 3)$ . Zapiši vektor, ki je pravokoten na  $\vec{a}$  in ima dolžino 5.
10. Naj bo  $\vec{a} = (3, -2, 4)$ . Poišči vse skalarje  $k \in \mathbb{R}$ , za katere je vektor  $k\vec{a}$ :
  - (a) enake dolžine kot  $\vec{a}$ ,
  - (b) dolžine 10,
  - (c) nasprotno usmerjen od  $\vec{a}$ .



# Poglavje 10

## Matrike

### Uvod

Matrike so eden temeljnih objektov linearne algebre in sodobne matematike. Predstavljajo urejene sheme števil, s katerimi lahko učinkovito opisujemo linearne preslikave, sisteme linearnih enačb, geometrijske transformacije in številne druge strukture v naravoslovju, tehniki, ekonomiji ter podatkovnih znanostih. Zaradi njihove izrazite preglednosti in računske uporabnosti so matrike osrednje orodje pri numeričnih metodah, statistiki, optimizaciji in računalniških algoritmih.

Osnovna ideja matrike je preprosta: matrika je pravokotna shema števil, ki označuje, kako neka linearna preslikava deluje na vektorje. Vsako linearno preslikavo  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lahko predstavimo z natanko eno matriko, in za poljuben vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  je slika  $T(\vec{v})$  enostavno podana kot matrični produkt  $A\vec{v}$ .

Pojem matrike se je razvil v 19. stoletju, vendar imajo njegove korenine precej starejšo tradicijo. Reševanje linearnih sistemov sega že v starodavno kitajsko delo *Jiu Zhang Suan Shu* (9. knjiga, okoli 200 pr. n. št.), kjer se pojavi postopek, ki je ekvivalenten današnji Gaussovi eliminaciji. Formalna teorija matrik pa se je začela oblikovati v delih matematikov, kot so Arthur Cayley (1821–1895), James Sylvester (1814–1897) in Carl Friedrich Gauss. Cayley je leta 1858 prvi zapisal idejo, da so matrike algebraični objekti s svojo lastno aritmetiko - s tem je položil temelje sodobni teoriji matrik in linearne algebre.

Posebne vrste matrik, kot so diagonalne, simetrične, trikotne matrike, imajo dodatne lastnosti, ki močno olajšajo računanje. Tako na primer diagonalne matrike komutirajo med seboj in so ključne pri diagonalizaciji ter spektralni analizi linearnih operatorjev. Simetrične matrike igrajo osrednjo vlogo v statistiki (kovariančne matrike) in optimizaciji (Hessejeva matrika).

Poglavje o matrikah je zato naravno nadaljevanje poglavja o vektorjih: matrike omogočajo opis linearnih preslikav v jeziku, ki je primeren za računsko obravnavo, analizo podatkov in modeliranje realnih procesov.

V nadaljevanju bomo spoznali definicijo matrike in osnovne tipe matrik, operacije z matrikami (seštevanje, množenje s skalarjem, matrični produkt), enotsko matriko, uporabo matrik pri reševanju sistemov linearnih enačb in njihovo interpretacijo kot predstavitev linearnih preslikav. To poglavje predstavlja osnovo za razumevanje številnih ekonomskih, statističnih in računalniških modelov, kjer matrike nastopajo kot univerzalno orodje za obdelavo večdimenzionalnih podatkov.

## 10.1 Definicija matrike

Matrika je osnovni objekt linearne algebre, s katerim na urejen in pregleden način predstavljamo podatke ali predpise linearnih preslikav. Matrika je pravokotna shema realnih ali kompleksnih števil, urejenih v vrstice in stolpce. V tem poglavju bomo obravnavali predvsem matrike nad množico realnih števil.

**Definicija 10.1.** Naj bodo  $m, n \in \mathbb{N}$ . *Matrika* velikosti  $m \times n$  je pravokotna shema (tabela) realnih števil

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kjer je  $a_{ij}$  element v  $i$ -ti vrstici in  $j$ -tem stolpcu matrike  $A$ .

Element  $a_{ij}$  imenujemo *element matrike* oziroma *koeficient*. Zapis matrike označujemo z velikimi tiskanimi črkami ( $A, B, C, \dots$ ), njene elemente pa z malimi dvoindeksniimi črkami ( $a_{ij}$ ).

*Opomba 40.* Množico vseh matrik velikosti  $m \times n$  nad realnimi števili označimo z  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Množica kvadratnih matrik reda  $n$  je  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

### Vrstice in stolpci matrike

Vsako matriko lahko obravnavamo tako, da posebej izpostavimo njene vrstice in stolpce.

- $i$ -ta vrstica matrike  $A$  je  $1 \times n$  matrika

$$A_{i*} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

- $j$ -ti stolpec matrike  $A$  je  $m \times 1$  matrika

$$A_{*j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

*Opomba 41.* Vektorji v  $\mathbb{R}^n$  so posebni primeri matrik: *stolpični vektorji* so matrike velikosti  $n \times 1$ , *vrstični vektorji* so matrike velikosti  $1 \times n$ .

Primer 10.1. Matrika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

je matrika velikosti  $2 \times 3$ . Njeni vrstici sta

$$(2, -1, 4), \quad (0, 5, 3),$$

stolpci pa

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

## Posebni primeri matrik

- **Kvadratna matrika:** matrika dimenzije  $n \times n$ , torej z enakim številom vrstic in stolpcev. Takšne matrike imajo v nadaljevanju pomembno vlogo pri različnih računskih postopkih in matematičnih obravnavah.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Diagonalna matrika:** je kvadratna matrika, ki ima vse nediagonalne elemente enake 0. Zapišemo jo kot

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

kjer je  $d_i \in \mathbb{R}$ . Primer diagonalne matrike reda  $n$  je

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

- **Enotska matrika:** je diagonalna matrika, pri kateri so vsi diagonalni elementi enaki 1.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Skalarna matrika:** skalarna matrika je diagonalna matrika, pri kateri so vsi diagonalni elementi enaki istemu skalarju  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Splošna oblika skalarne matrike reda  $n$  je

$$\lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Na primer, za  $\lambda = 3$  in  $n = 4$  dobimo matriko

$$3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Zgornje trikotna matrika:** matrika  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je *zgornja trikotna*, če so vsi elementi pod glavno diagonalo enaki 0. Splošna oblika zgornje trikotne matrike reda 4 je

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}.$$

Primer zgornje trikotne matrike:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- **Spodnje trikotna matrika:** matrika  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je *spodnja trikotna*, če so vsi elementi nad glavno diagonalo enaki 0. Splošna oblika spodnje trikotne matrike reda 4 je

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{pmatrix}.$$

Primer spodnje trikotne matrike:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

- **Simetrična matrika:** kvadratna matrika  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je *simetrična*, če velja

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za vse } i, j.$$

Elementi na glavni diagonalni so poljubni, elementi nad diagonalno pa določajo tiste pod diagonalno, saj je matrika po definiciji popolnoma simetrična glede na glavno diagonalno.

Primer simetrične matrike reda 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Očitno velja  $a_{ij} = a_{ji}$  za vse  $i, j$ , zato je matrika simetrična.

- **Ničelna matrika:**

$$0_{m \times n} = (0)_{m \times n}$$

ima vse elemente enake 0.

- **Stolpični in vrstični vektorji:** posebni primeri matrik z eno vrstico ali enim stolpcem.

## 10.2 Operacije z matrikami

V tem podpoglavju obravnavamo osnovne operacije z matrikami: seštevanje, množenje s skalarjem in matrični produkt. Te operacije so temelj za linearne preslikave, sisteme linearnih enačb ter vse nadaljnje strukture linearne algebre.

### 10.2.1 Seštevanje matrik

**Definicija 10.2.** Naj bosta  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Vsoto matrik  $A$  in  $B$  definiramo po komponentah:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tedaj je

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seštevamo lahko samo matrike enake velikosti.

*Primer 10.2.* Naj bosta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedaj je

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+5 & 3-2 \\ 0+3 & 4-1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Izrek 10.1.** Za matrice  $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  velja:

1.  $A + B = B + A$  (komutativnost),
2.  $(A + B) + C = A + (B + C)$  (asociativnost),
3. obstaja ničelna matrika  $0$ , da je  $A + 0 = A$ .

### 10.2.2 Množenje matrice s skalarjem

**Definicija 10.3.** Naj bo  $\lambda \in \mathbb{R}$  in  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Produkt skalarja in matrice definiramo kot

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m \times n}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tedaj je produkt skalarja in matrice

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Primer 10.3.* Za

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \lambda = -2$$

dobimo

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Izrek 10.2.** Za matrice  $A, B$  in skalarja  $\lambda, \mu$  velja:

1.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ ,
2.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ ,
3.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ .

### 10.2.3 Matrični produkt

Matrični produkt je temeljna operacija linearne algebre, saj predstavlja sestavljanje linearnih preslikav.

**Definicija 10.4.** Naj bo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Produkt  $AB$  je matrika velikosti  $m \times p$ , določena s predpisom

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Element  $(i, j)$  je torej skalarni produkt  $i$ -te vrstice matrike  $A$  in  $j$ -tega stolpca matrike  $B$ .

*Opomba 42.* Matrični produkt *ni komutativen*; na splošno velja  $AB \neq BA$ .

*Primer 10.4.* Naj bosta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ker je  $A$  matrika  $2 \times 2$  in  $B$  matrika  $2 \times 3$ , je  $AB$  matrika velikosti  $2 \times 3$ . Izračunamo:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 2 \\ -4 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Izrek 10.3.** Naj bodo dimenzije matrik take, da so vsi spodnji produkti definirani. Potem velja:

1.  $(AB)C = A(BC)$  (asociativnost),
2.  $A(B + C) = AB + AC$  (distributivnost z desne),
3.  $(A + B)C = AC + BC$  (distributivnost z leve).

### 10.2.4 Množenje matrike z vektorjem

Naj bo vektor  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  obravnavan kot stolpična matrika velikosti  $n \times 1$ . Če je  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , je produkt  $A\vec{x}$  vektor velikosti  $m \times 1$ , dan s predpisom

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

*Primer 10.5.* Za

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dobimo

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 3(-1) \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

### 10.2.5 Transponiranje matrike

Transponiranje je osnovna operacija na matrikah, pri kateri zamenjamo vrstice in stolpce. Nastala matrika ima obratne dimenzije in pomembno vlogo pri definiciji simetričnih matrik, skalarnega produkta ter pri številnih računskih metodah.

**Definicija 10.5.** Naj bo  $A = (a_{ij})$  matrika velikosti  $m \times n$ . *Transponirana matrika* matrike  $A$  je matrika  $A^T$  velikosti  $n \times m$ , dobljena tako, da postane  $i$ -ta vrstica matrike  $A$   $j$ -ti stolpec matrike  $A^T$ . Element transponirane matrike je

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Če je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

potem je transponirana matrika

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Primer 10.6.* Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matrika  $A$  je velikosti  $2 \times 3$ , zato je  $A^T$  velikosti  $3 \times 2$ :

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Izrek 10.4.** Za poljubni matriki  $A$  in  $B$  ter skalar  $\lambda$  veljajo naslednje lastnosti:

1.  $(A^T)^T = A$ ,
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,
3.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ,
4.  $(AB)^T = B^T A^T$  (obrnjeni vrstni red!).

*Opomba 43.* Zadnja lastnost  $(AB)^T = B^T A^T$  je ključna pri dokazovanju simetričnosti, ortogonalnosti in pri manipulaciji sestavljenih transformacij.

Primer 10.7. Naj bosta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajmo  $(AB)^T$  in  $B^T A^T$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -8 & 19 \end{pmatrix},$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Po drugi strani

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 5 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Ker sta izraza enaka, je potrjeno  $(AB)^T = B^T A^T$ .

## 10.3 Sistemi linearnih enačb in matrike

Sistemi linearnih enačb so osrednji predmet preučevanja linearne algebre. Vsaka linearna enačba z  $n$  spremenljivkami ima obliko

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

kjer so  $a_1, \dots, a_n$  realni koeficienti in  $b$  konstanta. Sistem več linearnih enačb lahko zapišemo pregledneje z matrikami, kar omogoča računsko učinkovitost in jasnejšo strukturo reševanja.

### 10.3.1 Splošna oblika sistema linearnih enačb

Sistem  $m$  enačb z  $n$  neznankami zapišemo kot

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Ta zapis lahko predstavimo s tremi objekti:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sistem je tako zapisan kot ena sama matrična enačba:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

### 10.3.2 Razširjena matrika

Za računanje uporabljamo *razširjeno matriko* sistema:

$$[A \mid \vec{b}] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Razširjena matrika omogoča Gaussovo eliminacijo, s katero sistem spreminjamo v ekvivalenten, a preprostejši sistem.

*Primer 10.8.* Sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$$

zapišemo z razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

*Primer 10.9.* Sistem treh enačb

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -3x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

ima razširjeno matriko

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

### 10.3.3 Rang matrike

**Definicija 10.6.** *Rang matrike*  $A$  je število linearno neodvisnih vrstic (ali stolpcev) matrike  $A$ . Označimo ga z  $\text{rang}(A)$ .

Pri reševanju sistemov linearnih enačb je ključno razmerje med rangom matrike koeficientov  $A$  in rangom razširjene matrike  $[A \mid \vec{b}]$ .

**Izrek 10.5** (Kriterij za rešljivost sistema). Naj bo dan sistem  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Tedaj velja:

1. Sistem ima rešitev natanko tedaj, ko

$$\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]).$$

2. Če je rang enak številu neznank  $n$ , ima sistem natanko eno rešitev.
3. Če je rang manjši od  $n$ , ima sistem neskončno mnogo rešitev.

### 10.3.4 Gaussova eliminacija

Gaussova eliminacija je postopek, s katerim razširjeno matriko pretvorimo v stopničasto oziroma zgornje trikotno obliko z uporabo dovoljenih elementarnih operacij na vrsticah:

1. zamenjava dveh vrstic,
2. množenje vrstice z neničelnim skalarjem,
3. prištevanje skalarnega večkratnika ene vrstice drugi vrstici.

Postopek:

- s pomočjo prve vrstice odpravimo koeficiente pod  $a_{11}$ ;
- nato se premaknemo v  $2 \times 2$  podmatriko in odpravimo koeficiente pod  $a_{22}$ ;
- nadaljujemo, dokler ne dobimo zgornje trikotne oblike.

Za triangularno matriko lahko nato sistem rešimo z *vstavljanjem nazaj*.

*Primer 10.10.* Rešimo sistem

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + 4z = 1, \\ -3x + y + 2z = -2. \end{cases}$$

Razširjena matrika je

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

Prva stopnja eliminacije:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1.$$

Dobimo

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \end{array} \right].$$

Druga stopnja eliminacije:

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{7}{5}R_2.$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{37}{5} & 0 \end{array} \right].$$

Zadnja vrstica daje

$$\frac{37}{5}z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Vstavimo v drugo vrstico:

$$-5y + 6 \cdot 0 = -5 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Vstavimo v prvo vrstico:

$$x + 2 \cdot 1 - 0 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Rešitev sistema je

$$(x, y, z) = (1, 1, 0).$$

## 10.4 Matrike v ekonomiji

Matrike imajo v ekonomiji izjemno pomembno vlogo, saj omogočajo opisovanje in analiziranje večdimenzionalnih sistemov, v katerih je več gospodarskih sektorjev medsebojno povezanih. Z matrikami lahko modeliramo tokove inputov in outputov, tehnološke koeficiente, cenovne strukture, portfelje, makroekonomske odnose ter sisteme linearnih enačb, ki izhajajo iz ekonomske teorije.

Njihova uporaba je naravna povsod, kjer se pojavljajo odvisnosti med več spremenljivkami, npr. v medsektorskih tokovih, v produkcijskih funkcijah, pri optimizaciji ter v statističnih in ekonometričnih modelih.

### Produksijske tehnologije

Z matrikami opisujemo porabo vhodov za proizvodnjo različnih dobrin; linearni modeli tehnologij omogočajo analizo učinkov sprememb v inputih.

### Makroekonomija

Modeli rasti, ravnotežja in dinamike lahko vključujejo matrične predstavitve (npr. prenosne matrice v modelih košaric dobrin).

### Ekonomija kapitala

Matrični modeli omogočajo izračune amortizacije, neto sedanje vrednosti ter proračune več projektov hkrati.

### Finančna matematika

Kovariančne matrice, portfeljske optimizacije, Markowitzov model tveganja.

## Statistika in ekonometrija

Matrike so temelj regresije, napovedovanja, OLS-metode in analize variance.

### Leontiefov input-output model

Med najpomembnejše aplikacije matrik v ekonomiji spadajo *Leontiefovi input-output modeli*, za katere je Wassily Leontief prejel Nobelovo nagrado. Modeli opisujejo, kako posamezni sektorji gospodarstva medsebojno porabljajo svoje produkte in kako zadovoljijo zunanjo (končno) potrošnjo.

Temeljna ideja je:

*kar vsak sektor proizvede, je bodisi porabljeno znotraj gospodarstva, bodisi zadovoljuje končno potrošnjo.*

Modeli se delijo na dva glavna tipa:

1. **zaprti model** (vse se porabi znotraj gospodarstva),
2. **odprti model** (dodana je zunanja končna potrošnja).

### Zaprti Leontiefov model

Zaprti model obravnava gospodarstvo, kjer se celotna proizvodnja porabi znotraj sektorjev. V priloženem viru je prikazan primer treh sektorjev: kmetijstvo, lesarstvo in tekstilna industrija. Podani so deleži njihove medsebojne porabe:

$$A = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.40 & 0.30 \\ 0.40 & 0.30 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.50 \end{pmatrix}.$$

Naj bo  $\vec{x} = (x, y, z)^T$  vektor izplačil sektorjev. Zaprti model zahteva *ravnotežje*:

$$A\vec{x} = \vec{x}.$$

To pomeni, da je celotna poraba proizvodov iz sektorjev (input) enaka celotni proizvodnji (output).

System enačb lahko preuredimo v

$$(I - A)\vec{x} = \vec{0}.$$

Rešitev določa razmerja med plačili sektorjev.

## Odprti Leontiefov model

Odprti model vključuje zunanjo potrošnjo (npr. potrošnike ali izvoz). Notranji deleži porabe med sektorji so dani s tehnično matriko  $A$ , zunanja potrošnja pa je vektor  $\vec{d}$ .

Ravnotežna zahteva postane

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{d},$$

oziroma

$$(I - A)\vec{x} = \vec{d}.$$

Če je matrika  $I - A$  obrnljiva, dobimo rešitev

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{d}.$$

Ta rešitev podaja, koliko mora vsak sektor proizvesti, da se zadovoljijo tako notranje potrebe kot zunanja potrošnja.

*Primer 10.11.* Odprti Leontiefov model s tremi sektorji

Obravnavajmo primer treh sektorjev (F - kmetijstvo, C - lesarstvo, T - tekstilna industrija), s tehnično matriko

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.25 & 0.10 \\ 0.15 & 0.10 & 0.05 \\ 0.10 & 0.05 & 0.15 \end{pmatrix},$$

in vektorjem zunanje potrošnje

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Model zahteva rešitev sistema

$$(I - A)\vec{x} = \vec{d}.$$

Rešitev sistema dobimo z množenjem z inverzno matriko:

$$\vec{x} = (I - A)^{-1}\vec{d}.$$

Zato je končna proizvodnja sektorjev:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1.3445 & -0.3835 & 0.1807 \\ 0.2336 & 1.1814 & 0.0970 \\ 0.1719 & 0.1146 & 1.2034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83.7999 \\ 74.2341 \\ 84.8138 \end{pmatrix}.$$

To pomeni, da morajo sektorji proizvesti približno:

- 83.8 milijard enot iz sektorja kmetijstva,
- 74.2 milijard enot iz sektorja lesarstva,
- 84.8 milijard enot iz sektorja tekstilne industrije,

da zadovoljijo tako notranje kot zunanje potrebe gospodarstva.

To pomeni, da celotno proizvodnjo dobimo kot linearno transformacijo zunanjega povpraševanja z Leontiefovo inverzno matriko.

Leontiefov model je eden najlepših primerov neposredne uporabe matrik v ekonomiji in ostaja temeljni model za analizo strukture gospodarstva ter vpliva sprememb v določenem sektorju na celotno ekonomsko ravnotežje.

## Naloge

1. Naj bosta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj  $A + B$  in  $A - B$ .

2. Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Izračunaj  $3A - 2A^T$ .

3. Določi matrični produkt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Preveri, ali je matrika

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

simetrična. Nato izračunaj  $A^T$ .

5. Naj bo

$$D = \text{diag}(2, -1, 4, 0).$$

Izračunaj  $D^2$  in  $3D - D^2$ .

6. Določi rang matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Z uporabo Gaussove eliminacije reši sistem

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

8. Z uporabo razširjene matrike preveri, ali ima sistem

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$$

rešitev. Če obstaja, jo določi.

9. **Leontiefov odprti input-output model.** Gospodarstvo ima tri sektorje. Tehnična matrika porabe je

$$A = \begin{pmatrix} 0.20 & 0.10 & 0.05 \\ 0.15 & 0.25 & 0.10 \\ 0.05 & 0.10 & 0.30 \end{pmatrix},$$

končna (zunanja) potrošnja pa je

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

- Zapiši odprti Leontiefov model v obliki  $(I - A)\vec{x} = \vec{d}$ .
  - Z Gaussovo eliminacijo izračunaj vektor bruto proizvodnje  $\vec{x}$ .
  - Interpretiraj dobljene komponente  $\vec{x}$ .
10. **Cenovni model z matriko stroškov.** Naj bo  $A$  matrika medsektorskih vhodnih stroškov (v deležih),  $\vec{v}$  pa vektor dodane vrednosti na enoto produkta. Ravnotežne cene  $\vec{p}$  zadoščajo enačbi

$$\vec{p} = A^T \vec{p} + \vec{v}.$$

Za

$$A = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.10 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Zapiši sistem v obliki  $(I - A^T)\vec{p} = \vec{v}$ .
- Reši sistem in določi ravnotežni ceni  $p_1$  in  $p_2$ .
- Razloži ekonomski pomen vektorja  $\vec{v}$ .

# Poglavje 11

## Linearno programiranje

### Uvod

Linearno programiranje predstavlja eno temeljnih metod matematične optimizacije, ki omogoča analitično reševanje problemov odločanja v pogojih omejenih virov. Njegovo bistvo je v iskanju optimalne (največje ali najmanjše) vrednosti linearne ciljne funkcije ob upoštevanju sistema linearnih omejitev. V ekonomskem kontekstu to pomeni učinkovito razporejanje omejenih virov med konkurenčne dejavnosti z namenom maksimiranja dobička, minimiziranja stroškov ali doseganja drugega poslovnega cilja.

Zgodovinski razvoj linearnega programiranja sega v prvo polovico 20. stoletja, ko so se pojavile potrebe po sistematičnem načrtovanju proizvodnje in logistike, zlasti v vojaškem in industrijskem okolju. Ključen preboj je bil dosežen po drugi svetovni vojni, ko je ameriški matematik George Dantzig (1914–2005) razvil znamenito simpleks metodo (1947), ki je omogočila učinkovito reševanje velikih linearnih optimizacijskih problemov. Ta metoda je hitro postala standardno orodje v operacijskih raziskavah in ekonomiki podjetja.

Sočasno so se razvijali tudi teoretični temelji, kot je dualnost v linearnem programiranju, ki razkriva globoko povezavo med primarnim (primalnim) in dualnim problemom ter omogoča ekonomsko interpretacijo mejnih vrednosti virov. Razvoj računalništva v drugi polovici 20. stoletja je dodatno pospešil uporabo linearnega programiranja, saj so postali rešljivi tudi zelo kompleksni modeli z več tisoč spremenljivkami in omejitvami.

Danes linearno programiranje predstavlja standardno analitično orodje na številnih področjih: v proizvodnem planiranju, logistiki, transportu, financah, upravljanju dobavnih verig, energetiki in javnem sektorju. Posebej pomembno vlogo ima pri podpori odločanju, kjer omogoča formalizacijo problema in kvantitativno vrednotenje alternativ.

V nadaljevanju poglavja bomo najprej uvedli osnovne matematične pojme linearnih neenačb in dopustne množice, nato pa postopno razvili metode za reševanje linearnih optimizacijskih problemov ter njihovo interpretacijo v ekonomskem okolju.

## 11.1 Linearne neenačbe in dopustna množica

Linearno programiranje temelji na razumevanju linearnih neenačb in njihovih rešitev. V tem razdelku bomo ponovili osnovne pojme ter jih razširili na geometrijsko interpretacijo v ravnini, ki je ključna za razumevanje dopustne množice.

### Linearne neenačbe dveh spremenljivk

Linearna neenačba dveh spremenljivk ima splošno obliko

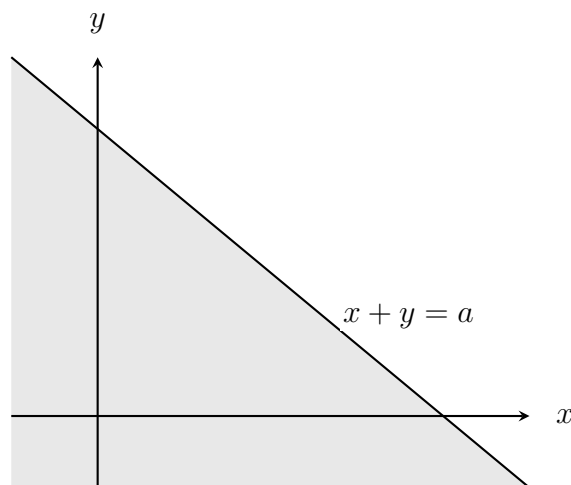
$$ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c, \quad ax + by < c \quad \text{ali} \quad ax + by > c,$$

kjer so  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $x$  in  $y$  pa sta spremenljivki.

Rešitve takšne neenačbe niso posamezne točke, temveč množica točk v ravnini. Geometrijsko vsaka linearna neenačba določa *polravnino*, ki jo omejuje premica

$$ax + by + c = 0.$$

Premica razdeli ravnino na dva dela (dve polravnini), pri čemer eden izmed njiju predstavlja množico vseh točk, ki zadoščajo dani neenačbi. Katera polravnina ustreza neenačbi, določimo z enostavnim preizkusom (npr. z vstavljanjem izhodišča  $(0, 0)$ , če leži izven premice).



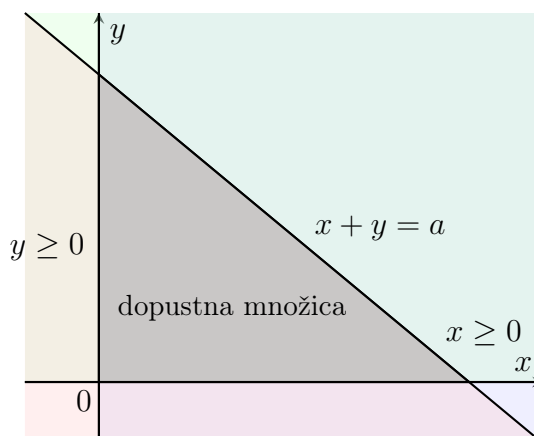
Slika 11.1: Premica  $x + y = a$  razdeli ravnino na dve polravnini; osenčeni del predstavlja množico rešitev neenačbe  $x + y \leq a$ .

### Sistem linearnih neenačb

V praksi se običajno srečujemo s sistemi več linearnih neenačb:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\leq c_1, \\ a_2x + b_2y &\leq c_2, \\ &\vdots \\ a_nx + b_ny &\leq c_n. \end{aligned}$$

Rešitev sistema je množica vseh točk  $(x, y)$ , ki hkrati zadoščajo vsem neenačbam. Geometrijsko to pomeni, da iščemo presečišče več polravnin.



Slika 11.2: Rešitev sistema linearnih neenačb kot presečišče treh polravnin.

## Dopustna množica

Množico vseh rešitev sistema linearnih neenačb imenujemo *dopustna množica*.

Dopustna množica ima lahko različne oblike:

- je prazna (če sistem nima rešitev),
- je neomejena (razteza se v neskončnost),
- ali pa je omejena (tvori mnogokotnik).

V primeru linearnega programiranja je dopustna množica ključnega pomena, saj predstavlja vse možne dopustne odločitve.

## Robne točke in geometrijska interpretacija

Poseben pomen imajo robne točke (oglišča) dopustne množice. To so točke, v katerih se sekajo robne premice, določene z enačbami

$$a_i x + b_i y = c_i.$$

Če je dopustna množica omejena, tvori konveksen mnogokotnik, katerega oglišča dobimo kot presečišča ustreznih premic.

Geometrijska interpretacija dopustne množice omogoča intuitivno razumevanje problemov linearnega programiranja, saj lahko v primeru dveh spremenljivk celoten problem predstavimo grafično.

V nadaljevanju bomo pokazali, kako na tej dopustni množici optimiziramo linearno funkcijo in določimo optimalno rešitev problema.

*Primer 11.1.* Obravnavajmo sistem neenačb:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 5.$$

Vsaka od teh neenačb določa polravnino:

- $x \geq 0$  določa desno polravnino glede na  $y$ -os,
- $y \geq 0$  določa zgornjo polravnino glede na  $x$ -os,
- $x + y \leq 5$  določa polravnino pod premico  $x + y = 5$ .

Njihovo presečišče je trikotnik z oglišči  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$  in  $(0, 5)$ , ki predstavlja dopustno množico.

Dopustna množica predstavlja osnovo za reševanje problemov linearnega programiranja, saj iščemo optimalno rešitev (maksimum ali minimum ciljne funkcije) prav znotraj te množice.

Naj bo dopustna množica konveksna množica, določena s sistemom linearnih neenačb, in naj bo ciljna funkcija linearna. Tedaj velja, da optimum (maksimum ali minimum) ciljne funkcije, če obstaja, dosežemo v vsaj eni izmed *oglišnih točk* dopustne množice.

Intuitivno lahko to pojasnimo tako: linearna ciljna funkcija ima v ravnini obliko družine vzporednih premic. Če takšno premico premikamo v smeri naraščanja vrednosti ciljne funkcije, bo zadnja točka, kjer se še dotika dopustne množice, praviloma ena izmed njenih oglišč.

Če bi optimum ležal v notranjosti dopustne množice, bi lahko premico ciljne funkcije še nekoliko premaknili v smeri izboljšanja vrednosti, ne da bi zapustili dopustno množico, kar je v protislovju z optimalnostjo.

Podobno velja za točke na robu, ki niso oglišča: tudi tam lahko običajno najdemo smer, v kateri vrednost ciljne funkcije še izboljšamo.

**Posledica 11.1.** Pri reševanju problemov linearnega programiranja v dveh spremenljivkah zadostuje, da preverimo vrednost ciljne funkcije v vseh ogliščih dopustne množice ter izberemo najboljšo vrednost.

*Opomba 44.* V posebnih primerih lahko ciljna funkcija doseže enako optimalno vrednost na več točkah (npr. vzdolž celotnega roba dopustne množice). V tem primeru ima problem več optimalnih rešitev.

Postopek grafičnega reševanja poteka v naslednjih korakih:

1. Zapišemo sistem linearnih neenačb, ki predstavlja omejitve problema.
2. Vsako neenačbo prikažemo kot polravnino v koordinatnem sistemu.
3. Določimo presečišče vseh polravnin, torej dopustno množico.

4. Določimo oglišča dopustne množice.
5. Izračunamo vrednost ciljne funkcije v vsakem oglišču.
6. Izberemo največjo ali najmanjšo vrednost (odvisno od problema).

*Primer 11.2.* Naj bo dana naloga:

$$\text{maksimiraj } z = 3x + 2y$$

pri pogojih:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 5.$$

Dopustna množica je trikotnik z oglišči  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$  in  $(0, 5)$ .

Izračunajmo vrednosti ciljne funkcije:

$$\begin{aligned} z(0, 0) &= 0, \\ z(5, 0) &= 15, \\ z(0, 5) &= 10. \end{aligned}$$

Največjo vrednost dosežemo v točki  $(5, 0)$ , kjer je

$$z_{\max} = 15.$$

Optimalna rešitev problema je torej  $x = 5$ ,  $y = 0$ .

*Primer 11.3.* Vito izdeluje glinene sklede in krožnike. Za izdelavo ene sklede potrebuje 6 minut, za izdelavo enega krožnika pa 3 minute. Za izdelavo sklede potrebuje  $\frac{3}{4}$  kg gline, za izdelavo krožnika pa 1 kg gline. Čas, v katerem mora narediti sklede in krožnike, je 20 ur, na zalogi pa ima 250 kg gline. Pri izdelavi vsake sklede ima dobiček 2 EUR, pri izdelavi krožnika pa 1,5 EUR. Koliko skled in krožnikov naj Vito izdelata, da bo njegov dobiček največji?

**Rešitev.** Najprej uvedemo spremenljivki:

$$x = \text{število izdelanih skled}, \quad y = \text{število izdelanih krožnikov}.$$

Ker število izdelkov ne more biti negativno, velja

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

**1. korak: zapišimo omejitve.**

**Časovna omejitev.** Za eno skledo potrebuje Vito 6 minut, za en krožnik pa 3 minute. Skupni razpoložljivi čas je 20 ur, to je

$$20 \cdot 60 = 1200 \text{ minut}.$$

Zato mora veljati

$$6x + 3y \leq 1200.$$

To neenačbo lahko poenostavimo:

$$2x + y \leq 400.$$

**Omejitev glede količine gline.** Za eno skledo potrebuje  $\frac{3}{4}$  kg gline, za en krožnik pa 1 kg. Na voljo ima skupaj 250 kg gline, zato velja

$$\frac{3}{4}x + y \leq 250.$$

## 2. korak: zapišimo ciljno funkcijo.

Pri vsaki skledi je dobiček 2 EUR, pri vsakem krožniku pa 1,5 EUR. Skupni dobiček je torej

$$z = f(x, y) = 2x + 1.5y.$$

Ker želimo dobiček povečati, iščemo maksimum te funkcije  $z = f(x, y)$

## 3. korak: zapišimo linearni program.

$$\text{maksimiraj } z = 2x + 1.5y$$

pri pogojih

$$2x + y \leq 400,$$

$$\frac{3}{4}x + y \leq 250,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

## 4. korak: določimo oglišča dopustne množice.

Dopustna množica je presečišče polravnin, določenih z danimi neenačbami. Njena oglišča dobimo iz presečišč robnih premic.

**Prvo oglišče:** presečišče koordinatnih osi

$$(0, 0).$$

**Drugo oglišče:** presečišče premice  $2x + y = 400$  z osjo  $x$ . Če je  $y = 0$ , dobimo

$$2x = 400 \quad \Rightarrow \quad x = 200.$$

Torej je oglišče

$$(200, 0).$$

**Tretje oglišče:** presečišče premice  $\frac{3}{4}x + y = 250$  z osjo  $y$ . Če je  $x = 0$ , dobimo

$$y = 250.$$

Torej je oglišče

$$(0, 250).$$

**Četrto oglišče:** presečišče premic

$$2x + y = 400 \quad \text{in} \quad \frac{3}{4}x + y = 250.$$

Odštejemo drugo enačbo od prve:

$$2x - \frac{3}{4}x = 400 - 250,$$

$$\frac{5}{4}x = 150,$$

$$x = 120.$$

Vstavimo izračunano vrednost za  $x$  v enačbo  $2x + y = 400$ :

$$2 \cdot 120 + y = 400,$$

$$240 + y = 400,$$

$$y = 160.$$

Torej dobimo oglišče s koordinatama

$$(120, 160).$$

**5. korak: izračunajmo vrednost ciljne funkcije v vseh izračunanih ogliščih.**

$$z(0, 0) = 2 \cdot 0 + 1.5 \cdot 0 = 0,$$

$$z(200, 0) = 2 \cdot 200 + 1.5 \cdot 0 = 400,$$

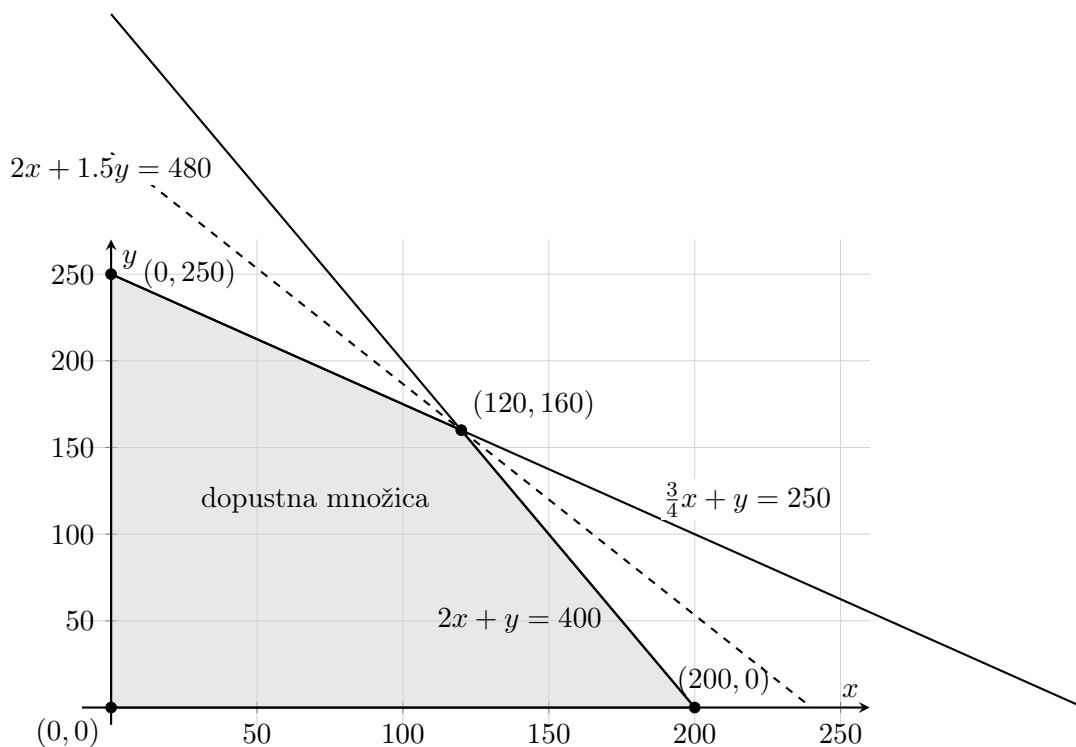
$$z(120, 160) = 2 \cdot 120 + 1.5 \cdot 160 = 240 + 240 = 480,$$

$$z(0, 250) = 2 \cdot 0 + 1.5 \cdot 250 = 375.$$

Največjo vrednost ciljna funkcija doseže v točki

$$(120, 160).$$

**Odgovor.** Vito naj izdelava 120 skled in 160 krožnikov, saj bo tako njegov dobiček največji in znaša 480 EUR.



Slika 11.3: Dopustna množica in premica ciljne funkcije za Vitov problem linearnega programiranja. Maksimalni dobiček dosežemo v oglišču  $(120, 160)$ .

*Primer 11.4.* Saša želi investirati 5000 EUR v delnice A in B. Ocenjuje se, da naložba v delnice A prinese 5 % dobička, naložba v delnice B pa 8 % dobička. Finančni svetovalc ji priporoča, da vsaj četrtnino svojega denarja investira v delnice A, največ polovico v delnice B, ter da znesek, investiran v delnice A, ni manjši od polovice zneska, investiranega v delnice B. Kako naj Saša investira svoj denar, da bo ob upoštevanju teh priporočil ocenjeni dobiček največji?

**Rešitev.** Označimo:

$$x = \text{znesek, investiran v delnice A,} \quad y = \text{znesek, investiran v delnice B.}$$

Ker Saša investira skupaj 5000 EUR, velja

$$x + y = 5000.$$

Poleg tega morajo biti izpolnjene še naslednje omejitve:

$$x \geq 1250, \quad y \leq 2500, \quad x \geq \frac{1}{2}y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

**Ciljna funkcija.** Dobiček pri delnicah A znaša 5 %, pri delnicah B pa 8 %, zato je skupni ocenjeni dobiček

$$z = 0.05x + 0.08y.$$

Iščemo maksimum te funkcije.

**Linearni program.**

$$\text{maksimiraj } z = 0.05x + 0.08y$$

pri pogojih

$$\begin{aligned}x + y &= 5000, \\x &\geq 1250, \\y &\leq 2500, \\x &\geq \frac{1}{2}y, \\x &\geq 0, \quad y \geq 0.\end{aligned}$$

Enačba

$$x + y = 5000$$

določa premico, zato dopustna množica ni mnogokotnik, temveč del te premice, ki zadošča še ostalim omejitvam.

Ker je donos pri delnici B večji kot pri delnici A, želimo investirati v delnico B čim večji možni znesek. Vendar priporočilo določa omejitvev

$$y \leq 2500.$$

Največji dopustni znesek, ki ga Saša lahko investira v delnice B, je torej 2500 EUR.

Iz pogoja

$$x + y = 5000$$

nato sledi

$$x = 2500.$$

Preverimo še ostale pogoje:

$$2500 \geq 1250, \quad 2500 \leq 2500, \quad 2500 \geq \frac{1}{2} \cdot 2500 = 1250.$$

Vidimo, da so vsi pogoji izpolnjeni.

Izračunajmo še dobiček:

$$z = 0.05 \cdot 2500 + 0.08 \cdot 2500 = 125 + 200 = 325.$$

**Odgovor.** Saša naj investira

2500 EUR v delnice A in 2500 EUR v delnice B.

Tako bo njen ocenjeni dobiček največji in bo znašal

325 EUR.

*Primer 11.5.* Zaradi pomanjkanja vitaminov A in B zdravnik pacientu svetuje uživanje napitkov Vita in Multi. Cena enega decilitra napitka Vita je 4 EUR, cena enega decilitra napitka Multi pa 5 EUR. En deciliter napitka Vita vsebuje 1  $\mu\text{g}$  vitamina A in 3  $\mu\text{g}$  vitamina B, en deciliter napitka Multi pa 3  $\mu\text{g}$  vitamina A in 2  $\mu\text{g}$  vitamina

B. Zdravnik je pacientu priporočil, da dnevno zaužije vsaj  $40 \mu\text{g}$  vitamina A in vsaj  $50 \mu\text{g}$  vitamina B. Koliko posameznega napitka naj pacient dnevno zaužije, da bo izpolnil zdravnikovo priporočilo z minimalnimi stroški?

**Rešitev.** Označimo:

$x$  = število decilitrov napitka Vita,       $y$  = število decilitrov napitka Multi.

Ker količine napitkov ne morejo biti negativne, velja

$$x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

**Omejitve.** Pacient mora zaužiti vsaj  $40 \mu\text{g}$  vitamina A in vsaj  $50 \mu\text{g}$  vitamina B. Za vitamin A dobimo omejitev

$$x + 3y \geq 40,$$

saj 1 dl napitka Vita prispeva  $1 \mu\text{g}$  vitamina A, 1 dl napitka Multi pa  $3 \mu\text{g}$  vitamina A.

Za vitamin B dobimo omejitev

$$3x + 2y \geq 50,$$

saj 1 dl napitka Vita prispeva  $3 \mu\text{g}$  vitamina B, 1 dl napitka Multi pa  $2 \mu\text{g}$  vitamina B.

**Ciljna funkcija.** Skupni dnevni stroški znašajo

$$z = 4x + 5y,$$

ker stane 1 dl napitka Vita 4 EUR, 1 dl napitka Multi pa 5 EUR. Iščemo minimum te funkcije.

**Linearni program.**

$$\text{minimiziraj } z = 4x + 5y$$

pri pogojih

$$x + 3y \geq 40,$$

$$3x + 2y \geq 50,$$

$$x \geq 0,$$

$$y \geq 0.$$

**Določitev kandidatov za optimum.** Ker gre za problem linearnega programiranja v dveh spremenljivkah, zadostuje preveriti oglišča dopustne množice.

Najprej določimo presečišče robnih premic:

$$x + 3y = 40, \quad 3x + 2y = 50.$$

Iz prve enaĉbe izrazimo

$$x = 40 - 3y.$$

Vstavimo v drugo enaĉbo:

$$3(40 - 3y) + 2y = 50,$$

$$120 - 9y + 2y = 50,$$

$$120 - 7y = 50,$$

$$-7y = -70,$$

$$y = 10.$$

Od tod sledi

$$x = 40 - 3 \cdot 10 = 10.$$

Torej je preseĉišĉe premic toĉka

$$(10, 10).$$

Sedaj preverimo še preseĉišĉi z osmi:

Āe je  $y = 0$ , dobimo pogoja

$$x \geq 40, \quad 3x \geq 50.$$

Torej je najmanjša dopustna vrednost na osi  $x$

$$x = 40,$$

zato dobimo toĉko

$$(40, 0).$$

Āe je  $x = 0$ , dobimo pogoja

$$3y \geq 40, \quad 2y \geq 50.$$

Torej je najmanjša dopustna vrednost na osi  $y$

$$y = 25,$$

zato dobimo toĉko

$$(0, 25).$$

**Izraĉun ciljne funkcije v ogliĉĉih.**

$$z(10, 10) = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 40 + 50 = 90,$$

$$z(40, 0) = 4 \cdot 40 + 5 \cdot 0 = 160,$$

$$z(0, 25) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 25 = 125.$$

Najmanjšo vrednost ciljne funkcija doseŹe v toĉki

$$(10, 10).$$

**Odgovor.** Pacient naj dnevno zauŹije

10 dl napitka Vita in 10 dl napitka Multi.

Tako bo izpolnil zdravnikovo priporoĉilo, pri ĉemer bodo dnevni stroĉki najmanjši in bodo znašali 90 EUR.

## 11.2 Simpleksna metoda

Pri dosedanjih primerih linearnega programiranja smo se srečali s problemi z dvema spremenljivkama. Rešitve je v teh primerih (izjemoma tudi pri treh spremenljivkah) mogoče določiti s pomočjo geometrijske interpretacije v ravnini, pri čemer si pomagamo z grafičnim prikazom dopustne množice. V praksi pa se problemi linearnega programiranja pogosto pojavljajo z velikim številom spremenljivk in omejitev, zato potrebujemo splošnejšo in učinkovitejšo metodo reševanja.

Najpomembnejša takšna metoda je **simpleksna metoda**, ki omogoča sistematično iskanje optimalne rešitve tudi pri zelo velikih problemih.

Simpleksno metodo je leta 1947 razvil ameriški matematik George B. Dantzig. Razvoj metode je bil tesno povezan s potrebami vojaške logistike med drugo svetovno vojno, kasneje pa se je hitro razširila na področja ekonomije, industrije, transporta in upravljanja virov. Danes predstavlja eno temeljnih orodij operacijskih raziskav in optimizacije.

Iz geometrijskega vidika vemo, da optimalna rešitev linearnega programskega problema (če obstaja) leži v enem izmed oglišč dopustne množice. Simpleksna metoda izkorišča to lastnost tako, da:

- začne v enem oglišču dopustne množice,
- nato prehaja iz oglišča v oglišče po robovih dopustne množice,
- pri vsakem koraku izboljšuje vrednost ciljne funkcije,
- postopek zaključi, ko nadaljnje izboljšanje ni več mogoče.

Na ta način metoda ne pregleduje vseh možnih rešitev, temveč le oglišča, kar bistveno poveča učinkovitost.

Simpleksno metodo uporabljamo pri problemih linearnega programiranja, ki:

- imajo več kot dve spremenljivki,
- vsebujejo večje število omejitev,
- zahtevajo numerično in algoritmično rešitev,
- se pojavljajo v realnih aplikacijah (npr. proizvodno planiranje, transportni problemi, optimizacija portfelja, razporejanje virov).

**Standardna oblika problema.** Za uporabo simpleksne metode problem običajno zapišemo v standardni obliki:

$$\text{maksimiziraj } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Neenačbe nato pretvorimo v enačbe z uvedbo dodatnih (t. i. slack) spremenljivk, kar omogoča uporabo simpleksnega algoritma.

Simpleksna metoda je:

- učinkovita tudi pri velikih problemih,
- sistematična in algoritmično izvedljiva,
- temelj številnih računalniških orodij za optimizacijo.

V nadaljevanju bomo najprej pokazali, kako problem linearnega programiranja preoblikujemo v obliko, primerno za uporabo simpleksne metode, nato pa bomo metodo predstavili na konkretnih primerih.

### Preoblikovanje problema v standardno obliko

Za uporabo simpleksne metode moramo problem linearnega programiranja najprej zapisati v ustrezni (standardni) obliki. Ta zahteva, da:

- je funkcija cilja zapisana v obliki maksimizacije,
- so vse omejitve zapisane kot linearne enačbe,
- so vse spremenljivke nenegativne.

#### Korak 1: Preoblikovanje ciljne funkcije.

Če je problem podan kot minimizacijski, ga lahko preoblikujemo v maksimizacijskega. To dosežemo tako, da minimizacijo funkcije  $z$  nadomestimo z maksimizacijo funkcije  $-z$ .

#### Korak 2: Preoblikovanje omejitev.

Omejitve v obliki neenačb pretvorimo v enačbe z uvedbo dodatnih spremenljivk.

- Pri neenačbah tipa  $\leq$  uvedemo **dodatne (slack) spremenljivke**:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \quad \implies \quad a_1x_1 + a_2x_2 + s = b, \quad s \geq 0.$$

- Pri neenačbah tipa  $\geq$  uvedemo **odvečne (surplus) spremenljivke**:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq b \implies a_1x_1 + a_2x_2 - s = b, \quad s \geq 0.$$

V primeru neenačb tipa  $\geq$  ali enačb pa uvedba zgolj odvečnih spremenljivk običajno ne zadošča za neposredno uporabo simpleksne metode. V takih primerih potrebujemo še **umetne spremenljivke**, ki omogočijo začetek algoritma. Te bomo podrobneje obravnavali kasneje.

### Korak 3: Nenegativnost spremenljivk.

Simpleksna metoda predpostavlja, da so vse spremenljivke nenegativne:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Če katera izmed spremenljivk lahko zavzame tudi negativne vrednosti, jo nadomestimo z razliko dveh nenegativnih spremenljivk.

### Standardna oblika problema.

Po preoblikovanju problem zapišemo v obliki:

$$\text{maksimiziraj } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_2 &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_m &= b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_m &\geq 0. \end{aligned}$$

Tako zapisan problem je primeren za uporabo simpleksne metode. V naslednjem koraku bomo pokazali, kako tak problem zapišemo v **simpleksni tabeli** in kako poteka postopek reševanja.

*Primer 11.6.* Obravnavajmo naslednji problem linearnega programiranja:

$$\text{maksimiziraj } z = 3x_1 + 2x_2$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

### Korak 1: Prehod v standardno obliko.

Uvedemo dodatni (slack) spremenljivki  $s_1$  in  $s_2$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 5. \end{aligned}$$

Funkcijo cilja zapišemo v obliki:

$$z - 3x_1 - 2x_2 = 0.$$

**Korak 2: Začetna simpleksna tabela.**

Baza	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$b$
$s_1$	1	1	1	0	4
$s_2$	2	1	0	1	5
$z$	-3	-2	0	0	0

Začetna baza je  $\{s_1, s_2\}$ .

**Korak 3: Izbira vstopne spremenljivke.**

V vrstici  $z$  poiščemo najbolj negativni koeficient:

$$-3 \Rightarrow x_1 \text{ vstopi v bazo.}$$

**Korak 4: Izbira izstopne spremenljivke (pivot).**

Izračunamo razmerja:

$$\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{5}{2} = 2.5.$$

Najmanjše razmerje je 2.5, zato iz baze izstopi  $s_2$ .

Pivotni element je 2.

**Korak 5: Pivotiranje.**

Najprej normiramo pivotno vrstico:

$$R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2.$$

Nova vrstica:

$$(1, 0.5, 0, 0.5, 2.5)$$

Nato eliminiramo  $x_1$  iz ostalih vrstic:

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$R_z \leftarrow R_z + 3R_2$$

Nova tabela:

Baza	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$b$
$s_1$	0	0.5	1	-0.5	1.5
$x_1$	1	0.5	0	0.5	2.5
$z$	0	-0.5	0	1.5	7.5

**Korak 6: Nadaljevanje postopka.**

Ker je v vrstici  $z$  še vedno negativen koeficient ( $-0.5$ ), nadaljujemo.

Vstopna spremenljivka:  $x_2$ .

Razmerja:

$$\frac{1.5}{0.5} = 3, \quad \frac{2.5}{0.5} = 5.$$

Iz baze izstopi  $s_1$ .

Pivotni element je 0.5.

**Korak 7: Pivotiranje.**

$$R_1 \leftarrow 2R_1$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - 0.5R_1$$

$$R_z \leftarrow R_z + 0.5R_1$$

Dobimo končno tabelo:

Baza	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$b$
$x_2$	0	1	2	-1	3
$x_1$	1	0	-1	1	1
$z$	0	0	1	1	9

**Korak 8: Optimalna rešitev.**

Ker v vrstici  $z$  ni več negativnih koeficientov, smo dosegli optimum.

Rešitev:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Maksimalna vrednost funkcije:

$$z = 9.$$

**Zaključek.** Optimalno rešitev smo dobili po dveh pivotnih korakih. Simpleksna metoda nas je sistematično vodila od začetne bazične rešitve do optimalne točke.

Opazimo, da ima obravnavani primer le dve spremenljivki, zato bi ga lahko rešili tudi na v prvem podpoglavju predstavljen način. Kljub temu ga uporabimo za predstavitev simpleksne metode, saj nam omogoča jasno in pregledno razumevanje posameznih korakov algoritma.

Prednost simpleksne metode se pokaže predvsem pri problemih z več spremenljivkami, kjer grafična metoda ni več uporabna.

V nadaljevanju si bomo ogledali primer s tremi spremenljivkami, kjer grafična interpretacija ni več mogoča, simpleksna metoda pa omogoča sistematično in učinkovito reševanje problema.

*Primer 11.7.* Podjetje načrtuje proizvodnjo treh izdelkov, ki zahtevajo uporabo skupnih omejenih virov (npr. delovni čas, surovine in proizvodne kapacitete). Vodstvo želi določiti optimalno količino posameznih izdelkov tako, da bo skupni dobiček čim večji, pri tem pa ne sme preseči razpoložljivih virov.

Vsak izdelek prispeva različen delež k skupnemu dobičku in različno obremenjuje razpoložljive vire. Problem zato naravno vodi v model linearnega programiranja s tremi odločitvenimi spremenljivkami, ki predstavlja tipičen primer optimizacije v proizvodnem planiranju.

Obravnavajmo naslednji problem linearnega programiranja:

$$\text{maksimiziraj } z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

### Korak 1: Prehod v standardno obliko.

Uvedemo dodatni spremenljivki  $s_1$  in  $s_2$ :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + s_2 &= 7. \end{aligned}$$

Funkcijo cilja zapišemo kot:

$$z - 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0.$$

### Začetna simpleksna tabela.

Baza	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
$s_1$	1	1	1	1	0	4
$s_2$	2	1	3	0	1	7
$z$	-2	-3	-1	0	0	0

### Korak 2: Izbira vstopne spremenljivke.

Najbolj negativen koeficient v vrstici  $z$  je  $-3$ , zato vstopi  $x_2$ .

### Korak 3: Izbira izstopne spremenljivke.

$$\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{7}{1} = 7.$$

Izstopi  $s_1$ . Pivotalni element je 1.

**Korak 4: Pivotiranje.**

Ker je pivot že enak 1, le eliminiramo  $x_2$  iz ostalih vrstic:

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1, \quad R_z \leftarrow R_z + 3R_1.$$

Nova tabela:

Baza	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$s_1$	$s_2$	$b$
$x_2$	1	1	1	1	0	4
$s_2$	1	0	2	-1	1	3
$z$	1	0	2	3	0	12

**Korak 5: Preverjanje optimalnosti.**

V vrstici  $z$  ni več negativnih koeficientov, zato smo dosegli optimalno rešitev.

**Rešitev.**

$$x_2 = 4, \quad x_1 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Maksimalna vrednost funkcije:

$$z = 12.$$

Primer jasno pokaže prednost simpleksne metode: kljub trem spremenljivkam smo optimalno rešitev določili hitro in sistematično, brez potrebe po grafični interpretaciji.

Pri uporabi simpleksne metode lahko naletimo tudi na posebne primere:

- problem nima rešitve (nedopustna množica),
- problem ni omejen (ciljna funkcija lahko narašča neomejeno),
- obstaja več optimalnih rešitev,
- pojav degeneracije.

# Literatura

- [1] Biernacki, Marek. 2010. *Applications of the integral in economics: a few simple examples for first-year students*. V: Didactics of Mathematics, 5–14. Ur. Janusz Łyko in Antoni Smoluk. Wrocław: The Publishing House of the Wrocław University of Economics.
- [2] Cimprič, Jaka. 2007. *Matematika 1*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Naravoslovnotehniška fakulteta.
- [3] Globevnik, Josip; Brojan, Miha. 2017. *Analiza 1*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [4] Goemans, Michel. 2015. *Linear programming*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.
- [5] GPH Panel Of Experts. 2017. *Quantitative Methods for Economic Analysis*. New Delhi: Indira Gandhi National Open University.
- [6] Hladnik, Milan. 2013. *Zgodovina matematike. Zapiski predavanj*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.
- [7] Oblak, Polona. 2019. *Matematika*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [8] Potočnik, Primož. 2011. *Zapiski predavanj iz matematike v praksi*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.
- [9] Raupova, Mohinur; Masharipov, Muhammad. 2025. *The importance of derivatives in economic and physical processes: theory and practice*. Journal of Analysis and Invention 2, št. 1: 9–14.
- [10] Sanghro, Majid Ali. 2025. *Integral Calculus for Economic Analysis*. MASEconomics.
- [11] Sovič, Tina; Špacapan, Simon. 2018. *Matematika 1*. Maribor: Univerzitetna založba Univerze v Mariboru.
- [12] Starček, Simon. 2025. *Gradiva iz predavanj matematike*. Ljubljana: Fakulteta za pravo in ekonomijo.
- [13] Stewart, James. 2016. *Calculus: Early Transcendentals*. Hamilton, Toronto: McMaster University, University of Toronto.

- [14] Tomšič, Gabrijel; Orel, Bojan; Mramor Kosta, Neža. 2008. *Matematika 1*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Fakulteta za računalništvo in informatiko.
- [15] Zalar, Bojana. 2009. *Uporaba matematičnih metod v logistiki 1*. Celje: Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko.
- [16] Zhou, Jianlan. *Application of Derivatives in Economic Management*. Advances in Social Science, Education and Humanities Research, 232: 682–683.
- [17] Željko, Matjaž. 2010. *Izbrana poglavja iz matematike*. BF–Biologija. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Biotehniška fakulteta.
- [18] Žigert Pleteršek, Petra; Črepnjak, Matevž. 2022. *Matematika A: za študente FKKT Univerze v Mariboru*. Maribor: Univerzitetna založba Univerze v Mariboru.